

# Borcherds product (講演概要と参考文献)

青木 宏樹 (東京理科大学)

2011 年 9 月 7 日

(9 月 2 日版)

本講演では、Borcherds によって発見された、無限積を用いて保型形式を構成する方法について、煩雑な部分を避けてなるべく簡単に、しかしアイデアが伝わる形で、概説したいと考えている。

## 1 Borcherds のアイデア

既に解説された Saito-Kurokawa lift から Borcherds product が構成される流れを、数学的厳密さにこだわらずに説明する。

### 1.1 重み 0 の Saito-Kurokawa lift

### 1.2 形式的な Borcherds product の構成

## 文献案内

意外にも (?), Borcherds product について何らかの解説が行われている日本語の文献は少なくない。総合的な解説としては [5, 21, 3] などがある。また、とりあえず Borcherds product がどんなものか知りたいときには [19, 22] などが読み易い。

## 2 Borcherds の結果

Borcherds の結果を述べるのに必要な用語等を準備したのち、彼の結果を紹介する。その証明は、現在のところ 3 通り知られているが、いずれも煩雑なため、概略を述べるにとどめる。

### 2.1 IV 型領域上の保型形式

### 2.2 Maass lift

### 2.3 Borcherds の定理

### 2.4 定理の証明

## 文献案内

Borcherds による原論文は [8] (および [10]) である。その後、Bruinier により、原論文を読むのに必要な予備知識、また応用なども含めて、Borcherds

product 全体を解説したレクチャーノート [11] が出版された。彼のレクチャーノートが、現在、最も Borchers product について詳しく書かれている文献であると思う。Borchers product は IV 型領域上の保型形式の構成法である。IV 型領域上の保型形式については、[6] などを、その上でのヤコビ形式については、[17] などを参考にされたい。

### 3 Borchers product の応用

Borchers product の応用について、いくつかの例を説明する。

- 3.1 ムーンシャイン予想の解決 (Borchers)
- 3.2 ある種のモジュライ空間の記述 (Borchers, Kondo)
- 3.3 保型形式環の決定 (Krieg, Dern, ...)
- 3.4 数理物理への応用
- 3.5 Borchers Product の特徴づけ (Heim, Murase)

#### 文献案内

Borchers によるムーンシャイン予想の解決については、原論文 [7] のほか、さまざまな解説が書かれている。本講演では Borchers product をメインに据えたためにムーンシャイン予想の解決を応用として扱ったが、時系列的には、Borchers はムーンシャイン予想を解決する過程で多変数の保型形式を無限積を用いて構成し、それが一般化されたものが Borchers product である。現在では、Borchers product は、様々な方面に応用されている。Borchers product で得られる保型形式は、その零点（や極）がはっきりわかる。このことを利用して、ある種のモジュライ空間の射影モデルの構成（[9, 24] など）や保型形式環の決定（[1, 12] など）などが行われている。また、数理物理にも応用されているようである（[18, 23] など）。

## 参考文献

- [1] H. Aoki, T. Ibukiyama, Simple graded rings of Siegel modular forms of small levels, differential operators and Borcherds products, *Int. J. Math.* **16**(3) (2005), 249–279.
- [2] H. Aoki, Estimating the dimension of the space of Siegel modular forms of genus 2 with level 2 and 3, *Proceedings of Japan-German seminar, Explicit Structure of Modular Forms and Zeta Functions* (白馬, 2001), 101–106.
- [3] H. Aoki, Practical Construction of Borcherds Product, 第 1 回保型形式周辺分野スプリングコンファレンス (浜名湖, 2002), 97–112.
- [4] H. Aoki, On vector valued Siegel modular forms of degree 2 with small levels, *Osaka J. Math.*, accepted.
- [5] 浅井 哲也, Borcherds の無限積 - 入門一步手前 -, 第 41 回代数学シンポジウム報告集, 113–121.
- [6] W. L. Baily Jr., *Introductory lectures on automorphic forms* (Iwanami, 1973).
- [7] R. E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109-2** (1992), 405–444.
- [8] R. E. Borcherds, Automorphic forms on  $O_{s+2,2}(R)$  and infinite products, *Invent. Math.* **120-1** (1995), 161–213.
- [9] R. E. Borcherds, The moduli space of Enriques surfaces and the fake Monster Lie superalgebra, *Topology* **35-3** (1996), 699–710.
- [10] R. E. Borcherds, Automorphic forms with singularities on Grassmannians, *Invent. Math.* **132-3** (1998), 491–562.
- [11] J. H. Bruinier, *Borcherds products on  $O(2,l)$  and Chern classes of Heegner divisors*, Lecture Notes in Mathematics **1780** (Springer-Verlag, Berlin, 2002).
- [12] T. Dern, A. Krieg, Graded rings of Hermitian modular forms of degree 2, *Manuscripta Math* **110-2** (2003), 251–272.
- [13] M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms* (Birkhäuser, 1985).
- [14] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin, Automorphic forms and Lorentzian Kac-Moody algebras. I; II, *Internat. J. Math.* **9-2** (1998), 153–199; 201–275.

- [15] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin, Siegel automorphic form corrections of some Lorentzian Kac-Moody Lie algebras, *Amer. J. Math.* **119-1** (1997), 181–224.
- [16] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin, Igusa modular forms and "the simplest" Lorentzian Kac-Moody algebras (Russian), *Mat. Sb.* **187-11** (1996), 27–66; translation in *Sb. Math.* **187-11** (1996), 1601–1641.
- [17] V. A. Gritsenko, Fourier-Jacobi functions in  $n$  variables (Russian), *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov* **168** (1988), *Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsii* **9**, 32–44, 187–188; translation in *J. Soviet Math.* **53-3** (1991), 243–252
- [18] J. Harvey, G. Moore, Algebras, BPS states, and Strings, *Nuclear Phys. B* **463-2;463-3** (1996), 315–368.
- [19] 原田 耕一郎, 松尾 厚, フィールズ賞受賞者紹介 R. E. Borcherds 氏の業績 I; II, *数学* **51-1** (1999/1), 56–61.
- [20] J. Igusa, On Siegel modular forms of genus two I; II, *Amer. J. Math.* **84** (1962), 175–200; **86** (1964), 392–412.
- [21] 池田 保, 無限積による保型形式の構成, 第 5 回 (1997 年) 整数論サマースクール報告集, 94–104.
- [22] 河合 俊哉, 弦理論における保型関数, *数理科学* **439** (2000/1), 28–34.
- [23] D. P. Jatkar, A. Sen, *Dyon spectrum in CHL models*, arXiv:0510147 [hep-th].
- [24] 金銅 誠之, Borcherds products and Algebraic Geometry, *数理解析研究所講究録* **1294** (2002), 121–128
- [25] M. Kontsevich, Product formulas for modular forms on  $O(2,n)$  (after R. Borcherds), *Seminaire Bourbaki* Vol. 1996/97, Asterisque No. 245 (1997), Exp. No. 821-3, 41–56.
- [26] 菅野 孝史, Jacobi 形式, Oda lifting, Maass space について, *数理解析研究所講究録* **617** (1987), 114–129