二つの楕円保型形式からの重さ半整数 Siegel 保型形式へのリフト

林田秀一

(大阪大学インターナショナルカレッジ)

本講演においては、２つの楕円保型形式から次数２重さ半整数のジーゲル保型形式へのリフティングについて解説したい。

まず、$S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ を次数２の一般化されたプラス空間とする。ここで、$S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ は次数２の重さ半整数ジーゲル保型形式のなす空間の部分空間で、レベルが 1 であるとみなせる空間である。次の予想が知られていた。

予想 1 (伊吹山-林田 '05)**.** 自然数 k に対し、$f \in S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ と $g \in S_{2k-4}(SL(2,\mathbb{Z}))$ を正規化されたヘッケ作用素の同時固有関数とする。

この時、$\mathcal{F}_{f,g} \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ となる重さ $k-\frac{1}{2}$ の次数２のジーゲル保型形式が存在し、$\mathcal{F}_{f,g}$ はヘッケ作用素の同時固有関数で、その L-関数は

$$L(s,\mathcal{F}_{f,g}) = L(s,f)L(s-1,g)$$

を満たす。

ここで、$L(s,\mathcal{F}_{f,g})$ は、Zhuravlev により導入された重さ半整数ジーゲル保型形式の L-関数で、$L(s,f)$ および $L(s,g)$ はそれぞれ f と g の L-関数である。オイラー因子の数値計算にこの予想の強い根拠があった。予想の中の L-関数の関係式は $p=2$ でのオイラー因子も含んでいることに注意したい。

この予想を近年、ある条件の下で証明した。

定理 2. k が偶数の時、上の f と g から $\mathcal{F}_{f,g} \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ を構成することができ、$\mathcal{F}_{f,g} \not\equiv 0$ であれば、$\mathcal{F}_{f,g}$ はヘッケ作用素の同時固有関数で $L(s,\mathcal{F}_{f,g}) = L(s,f)L(s-1,g)$ となる。

つまり、k が偶数、かつ $\mathcal{F}_{f,g}$ が非零、の条件の下で予想は正しい。$\mathcal{F}_{f,g}$ の構成法は池田保氏によりご教示頂いた。

定理の証明の鍵は、重さ半整数の次数３のジーゲル保型形式について一般化マース関係式を導くことである。マース関係式は、次数２重さ偶数のあるジーゲル保型形式のフーリエ係数の間の関係式

$$A\begin{pmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{pmatrix} = \sum_{d|(n,m,r)} d^{k-1} A\begin{pmatrix} nm/d^2 & r/(2d) \\ r/(2d) & 1 \end{pmatrix}$$

で、この関係式を満たすジーゲル保型形式が斉藤・黒川リフトの像となっていた。この関係式から対称性 $A\begin{pmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix}$ が得られ、この対称性が斉藤・黒川リフトの証明で必要であった。

本講演では、マース関係式を、フーリエ係数ではなくフーリエ・ヤコビ係数の間の関係式とみなす。この場合、そのマース関係式は、上記の対称性は明示しないが、pullback のヘッケ作用素の双対性を明示することが分かる。このマース関係式の次数３重さ半整数ジーゲル保型形式への一般化を示し、上記の定理を証明する。