Oda Lift

菅野孝史（金沢大学理工研究域）

織田孝幸氏は [5] において，（整数または半整数 weight の）楕円保型形式から直交群 $O(2,n-2)$ 上の正則保型形式への lifting を構成した．これは，Weil 表現を用いた志村対応の構成（Shintani [6], Niwa [4]）の一般化になっている（$O(2,1)^0 \sim SL_2(\boldsymbol{R})$ である）．また，$O(2,2)^0 \sim SL_2(\boldsymbol{R}) \times SL_2(\boldsymbol{R})$ ゆえ，$n=4$ の時には，Doi-Naganuma lift [1], [3] と結びつく．

一方，weight $2k-2$ の保型形式から，weight k の 2 次 Siegel 保型形式への lifting (Saito-Kurokawa lift) の証明（Zagier [9]）においては，Jacobi 形式からのリフトとみることが有効であった．このノートでは，主として [7] に基づき，Jacobi 形式から直交群へのリフトの形で Oda lift を定式化した．§1, 2 で，直交群，ヤコビ群上の保型形式を導入した後，§3 で Oda lift を述べる．議論のほとんどは，Oda [5] を Jacobi 形式の言葉に逐語的に言い替えたものに過ぎない．§4 で Fourier 係数の言葉で定義される Maass 型 lift が，Oda lift と（本質的に）一致することを見る．後半の二つの節で，Hecke 理論との関係を述べた．

なお，Jacobi 形式を扱う関係上，初めから $\boldsymbol{Q}$ ランクが 2 という状況を考える．[5] では直交群の $\boldsymbol{Q}$ ランクが 1 のものも含む形で結果が得られているので，原論文を読まれることをお勧めする．

記号

Q が n 次対称行列のとき，$x, y \in M_{n,1}$ に対し，

$$Q(x,y) := {}^t x Q y, \quad Q[x] := Q(x,x)$$

とおく．$z \in \boldsymbol{C}$ に対し，$\boldsymbol{e}[z] = e^{2\pi i z}$ と書く．また，記述を簡単にするため，条件 P に対し

$$\delta(P) := \begin{cases} 1 & P \text{ が成立するとき} \\ 0 & P \text{ が不成立のとき} \end{cases}$$

とする．例えば，$\delta(a=b)$ は Kronecker delta $\delta_{a,b}$ に他ならない．

§1. 直交群上の保型形式

1.1. 群・領域

S を m 次正定値対称行列で，even integral（i.e. 対角成分が全て偶数であるような整数行列）とする．

$$Q_0 := -S, \quad Q_1 := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & Q_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad Q = Q_2 := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & Q_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

とおく．従って，Q は符号 $(2, m+2)$ の対称行列である．

$$V_0 := \boldsymbol{R}^m, \quad V_1 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} \\ V_0 \\ \boldsymbol{R} \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}^{m+2}, \quad V = V_2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} \\ V_1 \\ \boldsymbol{R} \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}^{m+4}$$

の整数点の全体のなす格子をそれぞれ L_0, L_1, $L = L_2$ とおき，L_i の Q_i に関するに関する双対格子を $L_i^* = Q_i^{-1} L_i$ $(i = 0, 1, 2)$ で表す.

$$G_i = O(Q_i)^0 := \left\{ g_i \in GL_{m+2i}(\boldsymbol{R}) \;\middle|\; {}^t g_i Q_i g_i = Q_i \right\}^0 \qquad (i = 0, 1, 2)$$

を G_i の単位元の連結成分とする（$G = G_2$ とおく）．自然に，$G_0 \subset G_1 \subset G$ とみなす.

$V_{1,\boldsymbol{C}} = V_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{m+2}$ 内の領域を

$$\mathcal{D} := \left\{ \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \tau \\ w \\ z \end{pmatrix} \in V_{1,\boldsymbol{C}} \;\middle|\; Q_1[\operatorname{Im} \mathcal{Z}] > 0,\ \operatorname{Im} \tau > 0 \right\} \ni \mathcal{Z}_0 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

で定める（$Q_1[\operatorname{Im} \mathcal{Z}] > 0$ なる $\mathcal{Z} \in V_{1,\boldsymbol{C}}$ の全体は $\mathcal{D}$ と $-\mathcal{D}$ の disjoint union となる）.

$g \in G$, $\mathcal{Z} \in \mathcal{D}$ に対し，$\mathcal{Z} \in \mathcal{D}$ に対し,

$$\mathcal{Z}^{\sim} := \begin{pmatrix} Q_1[\mathcal{Z}]/2 \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \in V_{\boldsymbol{C}}, \qquad g \cdot \mathcal{Z}^{\sim} := (g\langle \mathcal{Z} \rangle)^{\sim} \cdot J_G(g, \mathcal{Z})$$

により，G の $\mathcal{D}$ への作用 $\mathcal{Z} \mapsto g\langle \mathcal{Z} \rangle$ と $G \times \mathcal{D}$ 上の正則保型因子 $J_G(g, \mathcal{Z})$ が定まる．この作用は推移的であり，$\mathcal{Z}_0 \in \mathcal{D}$ の G における固定化部分群を K とすると,

$$G/K \cong \mathcal{D}, \quad K \cong SO(2) \times SO(m+2)$$

が成立する.

$\mathcal{Z} \in \mathcal{D}$ のとき,

$$d\mathcal{Z} := (Q_1[\operatorname{Im} \mathcal{Z}]/2)^{-(m+2)}\, d(\operatorname{Re}\mathcal{Z})\, d(\operatorname{Im}\mathcal{Z}), \qquad d(\operatorname{Re}\mathcal{Z}),\ d(\operatorname{Im}\mathcal{Z}) : \text{Lebesgue 測度}$$

は $\mathcal{D}$ の G 不変測度を定める.

$x \in V_1$, $y \in V_0$ に対し,

$$n(x) := \begin{pmatrix} 1 & -{}^t x Q_1 & -Q_1[x]/2 \\ & 1_{m+2} & x \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G, \quad n_1(y) := \begin{pmatrix} 1 & -{}^t y Q_0 & -Q_0[y]/2 \\ & 1_m & y \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G_1$$

とおき，G の岩澤分解

$$g = n(x) n_1(y) \operatorname{diag}(a, b, 1_m, b^{-1}, a^{-1})\, k \qquad (x \in V_1,\ y \in V_0,\ a, b > 0,\ k \in K)$$

を用いて,

$$dg := a^{-(m+3)} b^{-(m+1)}\, dx\, dy\, da\, db\, dk, \qquad \operatorname{vol}(K) = 1$$

とすると，これは G の Haar 測度であり，$\mathcal{D}$ 上の可積分関数 φ に対して,

$$\int_G \varphi(g\langle \mathcal{Z}_0 \rangle)\, dg = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \varphi(\mathcal{Z})\, d\mathcal{Z}$$

が成り立つ.

1.2. 保型形式

G の離散部分群 $\varGamma$, $\varGamma^*$ を

$$\varGamma := G \cap GL_{m+4}(\boldsymbol{Z}) \supset \varGamma^* := \{\gamma \in \varGamma \mid (\gamma - 1)L^* \subset L\}$$

で定める．$\varGamma^*$ は $\varGamma$ の指数有限正規部分群である．$k \in \boldsymbol{N}$ とし，$\mathcal{D}$ 上の正則関数 F で,

$$\begin{cases} \text{(i)} \qquad F(\gamma\langle\mathcal{Z}\rangle) = J_G(\gamma, \mathcal{Z})^k\, F(\mathcal{Z}) \quad \text{for } {}^\forall\gamma \in \varGamma^* \\ \text{(ii)} \qquad \mathrm{Sup}_{g\in G}|F^{\mathrm{gr}}(g)| < \infty \quad (F^{\mathrm{gr}}(g) := F(g\langle\mathcal{Z}_0\rangle)\, J_G(g, \mathcal{Z}_0)^{-k}) \end{cases}$$

を満たすものを $\varGamma^*$ に関する weight k の正則尖点形式と言い，その全体を $S_k(\varGamma^*)$ で表す（$\varGamma$ に関する尖点形式の空間 $S_k(\varGamma)$ も全く同様に定義される）.

命題 1.1 各 $F \in S_k(\varGamma^*)$ は

$$F(\mathcal{Z}) = \sum_{\substack{\eta\in L_1^* \\ i\eta\in\mathcal{D}}} a_F(\eta)\, \boldsymbol{e}[Q_1(\eta, \mathcal{Z})]$$

と Fourier 展開される．また，τ に関する部分 Fourier 展開は

$$F(\begin{pmatrix} \tau \\ w \\ z \end{pmatrix}) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z, w)\, \boldsymbol{e}[n\tau], \qquad F_n(z, w) = \sum_{a\in\boldsymbol{Z},\ \alpha\in L_0^*} a_F(\begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ n \end{pmatrix})\, \boldsymbol{e}[az - S(\alpha, w)]$$

で与えられる.

F_1，$F_2 \in S_k(\varGamma^*)$ に対し，Petersson 内積を

$$\langle F_1, F_2\rangle_k := \int_{\varGamma^*\backslash\mathcal{D}} F_1(\mathcal{Z})\, \overline{F_2(\mathcal{Z})}\, (Q_1[\mathrm{Im}\mathcal{Z}]/2)^k\, d\mathcal{Z}$$

で定める.

§2. Jacobi 形式

2.1. 群・領域

S を前節同様，m 次正定値対称行列で even integral なものとする.
集合 $H_S := \left\{[\xi, \eta, \zeta] \,\middle|\, \xi, \eta \in V_0,\ \zeta \in \boldsymbol{R}\right\}$ は演算

$$[\xi, \eta, \zeta] \cdot [\xi', \eta', \zeta'] := [\xi + \xi', \eta + \eta', \zeta + \zeta' + S(\xi, \eta')]$$

により，群をなす（単位元は $[0, 0, 0]$，$[\xi, \eta, \zeta]^{-1} = [-\xi, -\eta, -\zeta + S(\xi, \eta)]$）．$H_S$ の中心は, $Z_S := \{[0, 0, \zeta] \mid \zeta \in \boldsymbol{R}\}$ である．$G' := SL_2(\boldsymbol{R})$ の H_S への作用を

$$g^{-1}[\xi, \eta, \zeta]g := [\xi', \eta', \zeta'], \quad (\xi', \eta') := (\xi, \eta)g, \quad \zeta' := \zeta - S(\xi, \eta)/2 + S(\xi', \eta')/2$$

で定義する．H_S と G' 半直積 $G_S := H_S \cdot G'$ を **Jacobi 群** と呼ぶ．Z_S は H_S の中心でもある.

Jacobi 群 G_S を G の部分群とみなそう．$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G' := SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し，

$$\iota(g) := \begin{pmatrix} g' & & \\ & 1_{n-2} & \\ & & g \end{pmatrix}, \quad g' := J^{-1}\,{}^t g^{-1}\,J = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

とおくと，$\iota(g) \in G$ である．また，$\xi, \eta \in V_0$, $\zeta \in \boldsymbol{R}$ に対し，

$$\iota([\xi,\eta,\zeta]) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^t\eta S & S(\xi,\eta)-\zeta & S[\eta]/2 \\ 0 & 1 & {}^t\xi S & S[\xi]/2 & \zeta \\ & & 1_m & \xi & \eta \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

も G の元である．$\iota([\xi,\eta,\zeta]g) := \iota([\xi,\eta,\zeta])\iota(g)$ は群準同型写像 $\iota : G_S \longrightarrow G$ となる．以下 ι を省略して，$G_S \subset G$ とみなす.

Jacobi 群 G_S は $\mathcal{D}_S := \mathfrak{H} \times \boldsymbol{C}^m$ に

$$\underline{g}\langle(z,w)\rangle := (g\langle z\rangle, wj(g,z)^{-1} + \xi g\langle z\rangle + \eta) \qquad (\underline{g}[\xi,\eta,\zeta]g)$$

と作用する．ここで，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G'$ に対し，$g\langle z\rangle := (az+b)(cz+d)^{-1}$, $j(g,z) := cz+d$ である．この作用は推移的で，$Z_0 = (i,0)$ の固定化部分群は $Z_S \cdot SO(2)$ である．

$k, n \in \boldsymbol{N}$ とし，$G_S \times \mathcal{D}_S$ 上の関数を

$$J_{k,n}([\xi,\eta,\zeta]g,(z,w)) := j(g,z)^k\, \boldsymbol{e}\left[n\left\{-\zeta + \left(\frac{c}{2}S[w] - S(\xi,w)\right)j(g,z)^{-1} - \frac{g\langle z\rangle}{2}S[\xi]\right\}\right]$$

で定める．$J_{k,n}$ は $G_S \times \mathcal{D}_S$ 上の正則保型因子である，即ち

$$J_{k,n}(\underline{g}\,\underline{g}', Z) = J_{k,n}(\underline{g}, \underline{g}'\langle Z\rangle)\,J_{k,n}(\underline{g}', Z) \qquad (\underline{g}, \underline{g}' \in G_S,\ Z \in \mathcal{D}_S)$$

を満たす.

2.2. Jacobi 形式

$\Gamma' := SL_2(\boldsymbol{Z}) \subset G'$ とし，$\Gamma_S := \{[\xi,\eta,\zeta] \mid \xi,\eta \in L_0,\ \zeta \in \boldsymbol{Z}\} \cdot \Gamma'$ とする．$\mathcal{D}_S$ 上の正則関数 f で，次の 2 条件

$$\begin{cases} \text{(i)} & f(\underline{\gamma}\langle Z\rangle) = J_{k,n}(\underline{\gamma}, Z)\,f(Z) \qquad {}^\forall\underline{\gamma} \in \Gamma_S,\ {}^\forall Z \in \mathcal{D}_S \\ \text{(ii)} & \mathrm{Sup}_{\underline{g}\in G_S}|f(\underline{g}\langle Z_0\rangle)J_{k,n}(\underline{g}, Z_0)^{-1}| < \infty \end{cases}$$

を満たすものを，Γ_S に関する weight k, index n（または $n \cdot S$ ）の **Jacobi 尖点形式** と呼び，その全体を $\mathfrak{S}_{k,n}(\Gamma_S)$ で表す.

$\mathcal{D}_S = \mathfrak{H} \times \boldsymbol{C}^m$ の測度を

$$dZ := \frac{dx\,dy}{y^2}\,d\xi\,d\eta, \qquad Z = (z,w) = (x+iy, \xi z + \eta) \in \mathcal{H}$$

で定義する（$d\xi$, $d\eta$ は $V=\boldsymbol{R}^m$ の通常の Lebesgue 測度）．dZ は $G_S=H_S\cdot G$ 不変な測度である．

Jacobi 尖点形式の空間 $\mathfrak{S}_{k,n}(\mathit{\Gamma}_S)$ は Petersson 内積

$$\langle f_1,f_2\rangle_{k,n}:=\int_{\mathit{\Gamma}_S\backslash\mathcal{D}_S} f_1(Z)\,\overline{f_2(Z)}\,y^k e^{-2\pi n y S[\xi]}\,dZ$$

に関して，有限次元 Hilbert 空間をなす．

$f\in\mathfrak{S}_{k,n}(\mathit{\Gamma}_S)$ の $\mathit{\Gamma}_{S,\infty}:=\left\{[0,\eta,\zeta]\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\,\middle|\,\eta\in L_0,\ \zeta,x\in\boldsymbol{Z}\right\}$ に関する不変性と，G_S 上での有界性から，次を得る．

命題 2.1　各 $f\in\mathfrak{S}_{k,n}(\mathit{\Gamma}_S)$ は

$$f(Z)=\sum_{\substack{a\in\boldsymbol{N},\alpha\in L_0^*\\ an-S[\alpha]/2>0}} a_f(a,\alpha)\,\boldsymbol{e}_{a,\alpha}(Z),\qquad \boldsymbol{e}_{a,\alpha}(Z):=\boldsymbol{e}[az+S(\alpha,w)]$$

と Fourier 展開される．

注意 2.1　$\underline{g}=[\xi,\eta,\zeta]g\in G_S$，$\mathcal{Z}=\begin{pmatrix}\tau\\w\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{D}$ に対し，$\underline{g}\langle\mathcal{Z}\rangle:=\begin{pmatrix}\tau'\\w'\\z'\end{pmatrix}$ とおく．

$$\begin{cases}(z',w')=\underline{g}\langle(z,w)\rangle, & J(\underline{g},\mathcal{Z})=j(g,z)\\ \tau'=\tau+\zeta-(\dfrac{c}{2}S[w]-S(\xi,w))j(g,z)^{-1}+\dfrac{g\langle z\rangle}{2}S[\xi]\end{cases}$$

が成り立つ．$\mathit{\Gamma}_S\subset\mathit{\Gamma}^*$ ゆえ，$F\in S_k(\mathit{\Gamma}^*)$ の n-th Fourier-Jacobi 係数 F_n は $\mathfrak{S}_{k,n}(\mathit{\Gamma}_S)$ の元となる．

2.3. テータ関数

$z\in\mathfrak{H}$ とし，$\boldsymbol{C}^m$ 上の正則関数 h で

$$h(w+\xi z+\eta)=\boldsymbol{e}[-\frac{z}{2}S[\xi]-S(\xi,w)]\cdot h(w)\qquad {}^\forall\xi,\eta\in L_0$$

を満たすものの全体を $\Theta_{S,z}$ で表す．各 $\alpha\in L_0^*$ に対し

$$\theta_\alpha(z,w):=\sum_{l\in L_0}\boldsymbol{e}[\frac{z}{2}S[\alpha+l]+S(\alpha+l,w)]$$

とおく．右辺の級数は $\mathcal{H}$ で広義一様絶対収束し，$\Theta_{S,z}$ の元を定める．

命題 2.2　θ_α は $\alpha\in L_0^*/L_0$ にのみ依存し，$\{\theta_\alpha(z,w)\mid\alpha\in L_0^*/L_0\}$ は $\Theta_{S,z}$ の基底となる．

θ_α の $\mathit{\Gamma}'=SL_2(\boldsymbol{Z})$ に関する変換公式を思い出しておく（Shintani [6] Proposition 1.6, 宮崎 [2]）．

命題 2.3　$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathit{\Gamma}'$ のとき，

$$\theta_\alpha(\gamma\langle(z,w)\rangle)=\varepsilon(\gamma)^{-m}j(\gamma,z)^{m/2}J_{0,1}(\gamma,(z,w))\sum_{\beta\in L^*/L}c_{\alpha,\beta}(\gamma)\theta_\beta(z,w)$$

が成り立つ．ここで，

$$c_{\alpha,\beta}(\gamma) := \begin{cases} \delta_{\alpha,a\beta}\cdot \boldsymbol{e}[abS[\alpha]/2] & (c=0) \\ (\det S)^{-1/2}|c|^{-m/2} \displaystyle\sum_{l\in L_0/L_0 c} \boldsymbol{e}\left[\frac{aS[\alpha+l]-2S(\alpha+l,\beta)+dS[\beta]}{2c}\right] & (c\neq 0)\end{cases}$$

$$\varepsilon(\gamma) := \begin{cases} \boldsymbol{e}[\mathrm{sgn}(c)/8] & (c\neq 0) \\ \boldsymbol{e}[(1-d)/8] & (c=0)\end{cases}$$

である．また，$U(\gamma) := \varepsilon(\gamma)^{-m}(c_{\alpha,\beta}(\gamma))$ は $\det S = |L^*/L|$ 次のユニタリ行列である．

注意 2.2　N を S のレベル，即ち，$N\cdot S^{-1}$ が even integral となる最小の自然数とする．このとき，$\Gamma_1(2N)$ 上で，$U(\gamma)$ は対角行列となる．

$f\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ のとき，各 $z\in\mathfrak{H}$ について $f(z,*)\in\Theta_{S,z}$ であるから

$$(*)\qquad f(z,w) = \sum_{\alpha\in L_0^*/L_0} \varphi_\alpha(z)\cdot\theta_\alpha(z,w)$$

と展開される．対応 $f\longmapsto(\varphi_\alpha)_{\alpha\in L_0^*/L_0}$ により，

$$\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)\cong S_{k-m/2}(\Gamma',\overline{U})$$

となる．ここで右辺は，

$$(\varphi_\alpha(\gamma\langle z\rangle))_{\alpha\in L_0^*/L_0} = j(\gamma,z)^{k-m/2}\overline{U(\gamma)}(\varphi_\alpha(z))_{\alpha\in L_0^*/L_0}\qquad {}^\forall\,\gamma\in\Gamma'$$

を満たす尖点形式の全体である．

2.4. Poincaré 級数

$(a,\alpha)\in\boldsymbol{Z}\times L_0^*$ が $\Delta_{a,\alpha} := a - S[\alpha]/2 > 0$ を満たすとする．

$$f_{a,\alpha}(Z) := \sum_{\underline{\gamma}\in\Gamma_{S,\infty}\backslash\Gamma_S} J_{k,1}(\underline{\gamma},Z)^{-1}\,\boldsymbol{e}_{a,\alpha}(\underline{\gamma}\langle Z\rangle)\qquad (Z\in\mathcal{D}_S)$$

により Poincaré 級数を定義する．

命題 2.4　$k>m+2$ のとき，$f_{a,\alpha}(Z)$ は，$\mathcal{D}_S$ 上で，広義一様絶対収束し，$f_{a,\alpha}\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ である．

(1)　任意の $f\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ に対し，

$$\langle f, f_{a,\alpha}\rangle_{k,1} = A_{S,k}\Delta_{a,\alpha}^{-(k-1-m/2)}\,a_f(a,\alpha)\ ,$$
$$A_{S,k} = (\det S)^{-1/2}2^{-(k-1)}(2\pi)^{-(k-1-m/2)}\,\Gamma(k-1-m/2)\ .$$

特に，$\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ は Poincaré 級数 $f_{a,\alpha}$ 達で生成される．

(2)　(a,α)，$(b,\beta)\in\boldsymbol{Z}\times L_0^*$，$\Delta_{a,\alpha}$，$\Delta_{b,\beta}>0$ のとき，

$$\Delta_{a,\alpha}^{-(k-1-m/2)}\,a_{f_{b,\beta}}(a,\alpha) = \Delta_{b,\beta}^{-(k-1-m/2)}\overline{a_{f_{a,\alpha}}(b,\beta)}\ .$$

注意 2.3　(a,α)，$(b,\beta)\in\boldsymbol{Z}\times L_0^*$ について，

$$(a,\alpha)\sim(b,\beta)\Longleftrightarrow \alpha\equiv\beta\pmod{L_0}\ \text{かつ}\ \Delta_{a,\alpha}=\Delta_{b,\beta}$$

により同値関係を定める．$f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ の Fourier 係数は，同値なパラメータ上では同じ値をとる．また，これらは同じ Poincaré 級数を定める．

Poincaré 級数の Fourier 係数を明示的に与える．

命題 2.5 $(a,\alpha) \in \boldsymbol{Z} \times L_0^*$, $\Delta_{a,\alpha} > 0$ とする．このとき，$f_{a,\alpha}$ の (b,β) $(\Delta_{b,\beta} > 0)$ での Fourier 係数は，次で与えられる．

$$a_{f_{a,\alpha}}(b,\beta) = C^+((a,\alpha);(b,\beta)) + (-1)^k C^+((a,-\alpha);(b,\beta))$$

$$C^+((a,\alpha);(b,\beta)) = \delta((a,\alpha) \sim (b,\beta)) + 2\pi(-i)^k (\det S)^{-1/2} \Big(\frac{\Delta_{b,\beta}}{\Delta_{a,\alpha}}\Big)^{(k-1-m/2)/2}$$

$$\times \sum_{c=1}^{\infty} H_c((a,\alpha);(b,\beta)) c^{-1-m/2} J_{k-1-m/2}\Big(\frac{4\pi}{c}\sqrt{\Delta_{a,\alpha}\Delta_{b,\beta}}\Big)$$

$$H_c((a,\alpha);(b,\beta)) = \sum_{\xi \in L_0/L_0 c} \sum_{\substack{d \in \boldsymbol{Z}/c\boldsymbol{Z} \\ (c,d)=1}} \boldsymbol{e}\Big[\frac{1}{c}\Big\{\frac{a_0}{2}S[\xi] + a_0 S(\xi,\alpha) + a_0 a + db - S(\xi+\alpha,\beta)\Big\}\Big]$$

ここで，$(c,d)=1$ のとき，$a_0 d - b_0 d = 1$ なるように $a_0, b_0 \in \boldsymbol{Z}$ を選んでおく．J は

$$J_\nu(z) := (z/2)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$$

定義される Bessel 関数である．

§3. Oda lift

3.1. テータ核

$z = x + iy \in \mathfrak{H}$, $k \in \boldsymbol{N}$ に対し，$V = \boldsymbol{R}^{m+4}$ 上の急減少関数 $f_{z,k}$ を

$$f_{z,k}(v) := Q(\mathcal{Z}_0^{\sim}, v)^k \cdot \boldsymbol{e}[Q_z[v]/2], \quad Q_z := xQ + iyR, \quad R := \begin{pmatrix} 1_2 & & \\ & S & \\ & & 1_2 \end{pmatrix}$$

で定め，

$$\theta_k(z,g;\mu) := \sum_{l \in L} y^{(m+2)/2} f_{z,k}(g^{-1}(l+\mu))$$

とおく（$\mu \in L^*$）．$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ に対し，変換公式

$$\theta_k(\gamma\langle z\rangle, g;\mu) = \varepsilon(\gamma)^m\, j(\gamma,z)^{k-m/2} \sum_{\nu \in L^*/L} c'_{\mu,\nu}(\gamma)\theta_k(z,g;\nu)$$

が成り立つ．ここで，$c'_{\mu,\nu}(\gamma)$ は

$$\begin{cases} \delta(\mu - \nu a \in L) \cdot \boldsymbol{e}[abQ[\mu]/2] & (c=0) \\ |\det Q|^{-1/2} |c|^{-(m+4)/2} \displaystyle\sum_{r \in L/Lc} \boldsymbol{e}\Big[\frac{aQ[\mu+r] - 2Q(\mu+r,\nu) + dQ[\nu]}{2c}\Big] & (c \neq 0) \end{cases}$$

で与えられる（[6] Proposition 1.6）．

$\pi : L^* \longrightarrow L_0^*$ を自然な写像とし，$Z = (z,w) \in \mathcal{D}_S$，$g \in G$ に対し，

$$\begin{aligned}\Theta_k(Z,g) &:= \sum_{\mu \in L^*/L} \theta_k(z,g;\mu) \cdot \theta_{-\pi(\mu)}(Z) \\ &= y^{(m+2)/2} \sum_{\mu \in L^*} f_{z,k}(g^{-1}\mu)\, \theta_{-\pi(\mu)}(Z)\end{aligned}$$

とおく．

命題 3.1　次が成り立つ．

(1)　$\Theta_k(Z, \gamma g \kappa) = J_G(\kappa, \mathcal{Z}_0)^k \cdot \Theta_k(Z,g) \qquad \text{for } {}^\forall\gamma \in \Gamma^*,\ {}^\forall\kappa \in K$.

(2)　$\Theta_k(\underline{\gamma}\langle Z\rangle, g) = J_{k,1}(\underline{\gamma}, Z) \cdot \Theta_k(Z,g) \qquad \text{for } {}^\forall\underline{\gamma} \in \Gamma_S$.

3.2. Oda lift の定義

以下，$k > 2m+4$ とする．$f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$，$F \in S_k(\Gamma^*)$ に対し，

$$\begin{aligned}(\iota f)(g) &:= \int_{\Gamma_S \backslash \mathcal{D}_S} f(Z)\, \overline{\Theta_k(Z,g)}\, y^k\, e^{-2\pi y S[\xi]}\, dZ \\ (\rho F)(Z) &:= \int_{\Gamma^* \backslash G} F(g)\, \Theta_k(Z,g)\, dg\end{aligned}$$

で定義する．ここで，$F(g) := F(g\langle \mathcal{Z}_0\rangle)\, J_G(g, \mathcal{Z}_0)^{-k}$ により，F を G 上の保型形式と見ている．形式的には，$\iota(f)$，$\rho(F)$ がそれぞれ，Γ^*，Γ_S に関する保型性をもつこと，Petersson 内積に関して互いに adjoint

$$\langle \iota(f), F\rangle_k = \langle f, \rho(F)\rangle_{k,1} \qquad (f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S),\ F \in S_k(\Gamma^*))$$

となることがわかる．以下の小節で，像の Fourier 係数を求め，(k が大きいとき）$\iota(f) \in S_k(\Gamma^*)$，$\rho(F) \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ となることを見てゆく．

3.3. ρF の Fourier 係数

$F \in S_k(\Gamma^*)$ に対し，ρF の積分は絶対収束し，$(\rho F)(\underline{\gamma}\langle Z\rangle) = J_{k,1}(\underline{\gamma}, Z)\,(\rho F)(Z)$　$(\underline{\gamma} \in \Gamma_S)$ が成り立つ．$v \in V$ に対し，$G_v := \{h \in G \mid hv = v\}$，$K_v := K \cap G_v$，$\Gamma_v^* := \Gamma^* \cap G_v$ とおく．また，G_v の Haar 測度 $d_v h$ と $G_v \backslash G$ 上の準不変測度 $d'_v \dot{g}$ を

$$\int_G \Phi(g)\, dg = \int_{G_v \backslash G} d'_v \dot{g} \int_{G_v} \Phi(hg)\, d_v h$$

となるように選んでおく．定義より，

$$(\rho F)(Z) = \sum_{\{\mu\}_{\Gamma^*}} \theta_{-\pi(\mu)}(Z) \int_{\Gamma_\mu^* \backslash G} y^{(m+2)/2} f_{z,k}(g^{-1}\mu)\, F(g)\, dg$$

である．ここで，$\{\mu\}_{\Gamma^*}$ は $\mu \in L^*$ の Γ^* 軌道を意味する．

$$Q[\mu] \leq 0 \implies \int_{\Gamma_\mu^* \backslash G_\mu} \Phi(hg)\, d_\mu h = 0$$

となること，及び，$\mu \in L^*$ が原始的（i.e. $n \geq 2$ に対して $\mu \notin L^* n$）ならば，適当な $\gamma \in \Gamma^*$ により，

$$\gamma\mu = \eta_{a,\alpha}^{\sim} := \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{a,\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{a,\alpha} = \begin{pmatrix} a \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (a,\alpha) \in \boldsymbol{Z} \times L_0^*$$

と書かれることより，

$$\rho F(Z) = \sum_{\substack{a\in\boldsymbol{Z},\ \alpha\in L_0^*/L_0 \\ \Delta_{a,\alpha}>0}} \sum_{n\in\boldsymbol{N}} \theta_{n\alpha}(Z)\, n^{k-(m+2)}\, \mathcal{A}((a,\alpha);n^2 z)$$

$$\mathcal{A}((a,\alpha);z) = \int_{\Gamma^*_{\eta^{\sim}_{a,\alpha}}\backslash G} y^{(m+2)/2}\, f_{z,k}(g^{-1}\eta^{\sim}_{a,\alpha})\, F(g)\, dg$$

を得る．$G_{a,\alpha} := G_{\eta^{\sim}_{a,\alpha}}$ は 符号 $(1, m+2)$ の直交群

$$O(\begin{pmatrix} & & 1 \\ & -T & \\ 1 & & \end{pmatrix})^0, \qquad T = \begin{pmatrix} S & S\alpha \\ {}^t\alpha S & 2a \end{pmatrix}$$

と同型であり，岩澤分解

$$h = \begin{pmatrix} 1 & {}^t yT & T[y]/2 \\ & 1_{m+1} & y \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & & \\ & 1_{m+1} & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} k \qquad (k \in K_{a,\alpha})$$

を用いて $G_{a,\alpha}$ の Haar 測度

$$d_{a,\alpha}h := t^{-(m+2)} dt\, dx\, dk \qquad \left(\int_{K_{a,\alpha}} dk = 1 \right)$$

を正規化しておく．このとき，次が成立する．

定理 3.2 $k > 2m+4$, $F \in S_k(\Gamma^*)$ とする．

(1) $\rho F \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$.

(2) $(a_0, \alpha_0) \in \boldsymbol{Z} \times L_0^*$, $\Delta_{a_0,\alpha_0} > 0$ のとき，

$$a_{\rho F}(a_0, \alpha_0) = c(\rho) \sum_{\substack{a,n\in\boldsymbol{N},\ \alpha\in L_0^*/L_0 \\ \Delta_{a_0,\alpha_0}=n^2\Delta_{a,\alpha},\ \alpha_0-n\alpha\in L_0}} n^{k-m-2} \Delta_{a,\alpha}^{(k-m-1)/2}\, I_{a,\alpha}$$

$$I_{a,\alpha} := \int_{\Gamma^*_{a,\alpha}\backslash G_{a,\alpha}} F(hg_{a,\alpha})\, d_{a,\alpha}h, \quad c(\rho) := i^k (\det S)^{-1/2}\, 2^{k-1-m/2} .$$

3.4. ιF の Fourier 係数

$(a,\alpha) \in \boldsymbol{Z} \times L_0^*$, $\Delta_{a,\alpha} > 0$ に対し，

$$\Omega_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) := \sum_{\substack{l\in L^* \\ \pi(l)+\alpha\in L_0 \\ Q[l]/2=\Delta_{a,\alpha}}} Q(\mathcal{Z}^{\sim}, l)^{-k} = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} \Omega^{(n)}_{a,\alpha}(\mathcal{Z})$$

$$\Omega_{a,\alpha}^{(n)}(\mathcal{Z}) := \sum_{\substack{b\in\boldsymbol{Z},\ \beta\in L_1^* \\ \pi(\beta)+\alpha\in L_0 \\ bn+Q_1[\beta]/2=\Delta_{a,\alpha}}} \left(-\frac{n}{2}Q_1[\mathcal{Z}]+Q_1(\mathcal{Z},\beta)+b\right)^{-k}$$

$$\Omega_{a,\alpha}^{(0)+}(\mathcal{Z}) := \sum_{\substack{b\in\boldsymbol{Z},\ \beta\in L_1^* \\ \pi(\beta)+\alpha\in L_0 \\ Q_1[\beta]/2=\Delta_{a,\alpha},\ i\beta\in\mathcal{D}}} \left(Q_1(\mathcal{Z},\beta)+b\right)^{-k}$$

とおく．$\Omega_{a,\alpha}^{+}(\mathcal{Z}) := \Omega_{a,\alpha}^{(0)+}(\mathcal{Z}) + \sum_{n\geq 1}\Omega_{a,\alpha}^{(n)}(\mathcal{Z})$ とおくと，

$$\Omega_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) = \Omega_{a,\alpha}^{+}(\mathcal{Z}) + (-1)^k\Omega_{a,-\alpha}^{+}(\mathcal{Z})$$

となる．

定理 3.3 $(a,\alpha)\in\boldsymbol{Z}\times L_0^*$，$\Delta_{a,\alpha}>0$ のとき，以下が成り立つ．

(1) Poincare 級数 $f_{a,\alpha}$ の ι による像（を領域上の関数とみたもの）は．$\Omega_{a,\alpha}$ の定数倍となる：

$$(\iota f_{a,\alpha})^{\mathrm{dm}}(\mathcal{Z}) := (\iota f_{a,\alpha})(g)\ J_G(g,\mathcal{Z}_0)^k = c(\iota)\cdot\Omega_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) \quad (\mathcal{Z}=g\langle\mathcal{Z}_0\rangle)\ .$$

ここで，$c(\iota) := 2^{-m/2}(\det S)^{-1/2}\pi^{-k}\Gamma(k)$.

(2) $\Omega_{a,\alpha}\in S_k(\Gamma^*)$ であり，$\Omega_{a,\alpha}^{+}$ の $\nu\in L_1^*$ $(i\nu\in\mathcal{D})$ での Fourier 係数 $C_{a,\alpha}^{+}(\nu)$ は以下のように Bessel 関数を用いて表示される．

$$\begin{aligned} C_{a,\alpha}^{+}(\nu) = C_{a,\alpha}^{(0)+}(\nu) &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{k+1}}{n^{1+m/2}\Gamma(k)(\det S)^{1/2}}\cdot\Big(\frac{Q_1[\nu]}{2\Delta_{a,\alpha}}\Big)^{(k-1-m/2)/2} \\ &\times J_{k-1-m/2}\big(\frac{4\pi}{n}\sqrt{\Delta_{a,\alpha}Q_1[\nu]/2}\big) \sum_{\substack{\lambda\in L_1^*/L_1 n \\ Q_1[\lambda]/2-\Delta_{a,\alpha}\in n\boldsymbol{Z} \\ \pi(\lambda)+\alpha\in L_0}} \boldsymbol{e}[-Q_1(\nu,\lambda)/n] \end{aligned}$$

$$C_{a,\alpha}^{(0)+}(\nu) := \frac{(-2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum_{\substack{r\in\boldsymbol{N},\nu\in L_1^* r \\ Q_1[\nu r^{-1}]/2=\Delta_{a,\alpha} \\ \pi(\nu r^{-1})+\alpha\in L_0}} r^{k-1}$$

3.5. Zagier identity

次節で，Fourier 係数を用いた Maass 型のリフトを考える．次の定理は，両者の一致を示すために用いられる（Zagier [8] Theorem 3，Oda [5] Theorem 5）．

定理 3.4 $Z\in\mathcal{D}_S$，$\mathcal{Z}\in\mathcal{D}$ について，

$$\sum_{\substack{(a,\alpha)\in\boldsymbol{Z}\times L_0^* \\ \Delta_{a,\alpha}>0}} \Delta_{a,\alpha}^{k-1-m/2}\overline{\Omega_{a,\alpha}(\mathcal{Z})}\,\boldsymbol{e}_{a,\alpha}(Z) = \sum_{(b,\beta):/\sim} \Delta_{b,\beta}^{k-1-m/2}\ \overline{\Omega_{b,\beta}^{(0)+}(\mathcal{Z})}\, f_{b,\beta}(Z)$$

が成立する．ここで，右辺の (b,β) は注意 2.3 で述べた同値類の代表を動く．

まず，$f_{b,\beta}$ の Fourier 展開を利用して，両辺の $\boldsymbol{e}_{a,\alpha}(Z)$ の係数を比較する．その後，前定理を用いて $\overline{\boldsymbol{e}[Q_1(\nu,\mathcal{Z})]}$ の係数を比較する．両辺とも $J_{k-1-m/2}(*)$ の言葉で記述され，その係数が一致することをみることで，定理 3.4 の証明が完了する．

§4. Maass type lift

4.1. シフト作用素と Maass 型リフト

$N \in \boldsymbol{N}$, $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ に対し，$\mathcal{D}_S$ 上の関数 $V_N f$ を

$$(V_N f)(z,w) := N^{k-1} \sum_{B \in \Gamma' \backslash T(N)} j(B,z)^{-k} \boldsymbol{e}\left[-\frac{cN}{2} S[w] j(B,z)^{-1}\right] f(B\langle z \rangle, wNj(B,z)^{-1})$$

とおく．ここで，

$$T(N) = \left\{ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\boldsymbol{Z}) \;\middle|\; \det B = N \right\}$$

$$B\langle z \rangle := \frac{az+b}{cz+d}, \quad j(B,z) = cz+d \qquad \text{for } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in T(N)$$

とおいた．$V_N f \in \mathfrak{S}_{k,N}(\Gamma_S)$ であることは容易に確かめれらる．

定理 4.1 $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ に対し，$\mathcal{D}$ 上の関数 $I(f)$ を

$$\begin{aligned} I(f)(\begin{pmatrix} \tau \\ w \\ z \end{pmatrix}) &= \sum_{N=1}^{\infty} (V_N f)(z,w)\, \boldsymbol{e}[N\tau] \\ &= \sum_{a,b \in \boldsymbol{N}, \alpha \in L_0^*} \left\{ \sum_{\substack{r \in \boldsymbol{N} \\ a,b \in r\boldsymbol{Z} \\ \alpha \in L_0^* r}} r^{k-1} a_f(abr^{-2}, \alpha r^{-1}) \right\} \boldsymbol{e}[az + S(\alpha, w) + b\tau] \end{aligned}$$

で定める．

(1) $I(f) \in S_k(\Gamma^*)$ である（I を **Maass type lift** と呼ぶ）．

(2) I は $\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ から $S_k(\Gamma^*)$ への単射で，I の像は Maass space

$$\left\{ F \in S_k(\Gamma^*) \;\middle|\; a_F(\begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ b \end{pmatrix}) = \sum_{\substack{r \in \boldsymbol{N} \\ a,b \in r\boldsymbol{Z},\ \alpha \in L_0^* r}} r^{k-1} a_F(\begin{pmatrix} abr^{-2} \\ \alpha r^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}) \quad \text{for } {}^\forall \begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ b \end{pmatrix} \in L_1^* \right\}$$

に一致する．

証明のポイントは，Γ^* が Γ_S，Γ_1^* および

$$M := \begin{pmatrix} & & -J \\ & 1_m & \\ -J & & \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成されることである．シフト作用素 V_N の性質から Γ_S に関する保型性が，Fourier 展開の形から Γ_1^* に関する保型性が得られる．M に関する保型性は，τ と z の対称性から導かれる．

4.2. Oda リフトとの一致

定理 4.2 $k > 2m+4$ のとき，任意の $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ に対し， 次が成り立つ．

$$(\iota f)^{\mathrm{dm}}(\mathcal{Z}) := (\iota f)(g)\, J_G(g, \mathcal{Z})^k = 2\overline{c(\rho)} \cdot I(f)(\mathcal{Z}) \quad (\mathcal{Z} = g\langle \mathcal{Z}_0 \rangle)\ .$$

［証明］　Zagier Identity（定理 3.4）で $\boldsymbol{e}_{a,\alpha}(Z)$ の係数を比較する．$(a,\alpha) \in \boldsymbol{Z} \times L_0^*$，$\varDelta_{a,\alpha} > 0$ のとき，

$$\varDelta_{a,\alpha}^{k-1-m/2} \varOmega_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) = \sum_{(b,\beta)/\sim} \varOmega_{b,\beta}^{(0)+}(\mathcal{Z})\, \varDelta_{b,\beta}^{k-1-m/2} \overline{a_{f_{b,\beta}}(a,\alpha)}\ .$$

命題 2.4 を考慮して

$$\begin{aligned}
\varOmega_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) &= \sum_{(b,\beta):/\sim} \varOmega_{b,\beta}^{(0)+}(\mathcal{Z})\, a_{f_{a,\alpha}}(b,\beta) \\
&= \sum_{(b,\beta):/\sim} \frac{(-2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum_{\nu \in L_1^*,\ i\nu \in \mathcal{D}} \sum_{\substack{r \in \boldsymbol{N},\ \nu \in L_1^* r \\ Q_1[\nu r^{-1}] = b - S[\beta]/2 \\ \pi(\nu r^{-1}) + \beta \in L_0}} r^{k-1} \boldsymbol{e}[Q_1(\nu,\mathcal{Z})] \cdot a_{f_{a,\alpha}}(b,\beta) \\
&= \frac{(-2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum_{\substack{\nu \in L_1^*,\ i\nu \in \mathcal{D} \\ {}^t\nu = (a, {}^t\alpha, b)}} \sum_{r \in \boldsymbol{N} \nu r^{-1} \in L_1^*} r^{k-1} a_{f_{a,\alpha}}(abr^{-2}, -\alpha r^{-1})\, \boldsymbol{e}[Q_1(\nu,\mathcal{Z})]
\end{aligned}$$

より，主張を得る．　∎

§5. Hecke 作用素

以下，m 次正定値 even integral 対称行列 S が <u>maximal</u> であると仮定する．即ち，$g \in M_m(\boldsymbol{Z}) \cap GL_m(\boldsymbol{Q})$ で $S[g^{-1}] := {}^t g^{-1} S g^{-1}$ が even integral となるものは $g \in GL_m(\boldsymbol{Z})$ に限るとする．また，直交群や Jacobi 群 をそれぞれ $\boldsymbol{Q}$ 上の代数群とみることにする．例えば，G はその $\boldsymbol{Q}$ 有理点が

$$G_{\boldsymbol{Q}} := \left\{ g \in GL_{m+4}(\boldsymbol{Q}) \;\middle|\; {}^t g Q g = Q \right\}$$

となる代数群を表す．素点 v に対し，$\boldsymbol{Q}_v$ 有理点を G_v と，adele 化群を G_A と書く．従って，前節まで用いていた $\boldsymbol{R}$ 有理点の単位元の連結成分は G_∞^0 と表される．

5.1. Jacobi Hecke 環・L 関数

p を素数とし，$G_{S,p} = G_S(\boldsymbol{Q}_p)$ の開 compact 部分群 $K_{S,p}$ を

$$K_{S,p} := \left\{ [\xi,\eta,\zeta] g \;\middle|\; \xi,\eta \in L_{0,p} := L_0 \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Z}_p,\ \zeta \in \boldsymbol{Z}_p,\ g \in SL_2(\boldsymbol{Z}_p) \right\}$$

で定める．$G_{S,p}$ の中心は，$Z_{S,p} := \{[0,0,\zeta] \mid \zeta \in \boldsymbol{Q}_p\}$ である．$\boldsymbol{Q}_A/\boldsymbol{Q}$ の basic character $\chi = \prod_v \chi_v$ を $\chi_\infty(x) = \boldsymbol{e}[x]$ により定める．

$G_{S,p}$ 上の両側 $K_{S,p}$ 不変な $\boldsymbol{C}$ 値関数 ϕ で

$$\phi([0,0,\zeta]\underline{g}) = \chi_p(\zeta)\phi(\underline{g}) \qquad \text{for } {}^\forall\zeta \in \boldsymbol{Q}_p,\ {}^\forall \underline{g} \in G_{S,p}$$

を満たし，$Z_{S,p} \backslash \operatorname{supp}\phi$ が compact となるものの全体 $\mathcal{H}_{S,p}$ は，convolution

$$(\phi_1 * \phi_2)(\underline{g}) := \int_{Z_{S,p}\backslash G_{S,p}} \phi(\underline{g}\,\underline{g_1}^{-1})\, \phi_2(\underline{g_1})\, d\underline{g_1} \qquad \mathrm{vol}(Z_{S,p}\backslash Z_{S,p}K_{S,p}) = 1$$

により $\boldsymbol{C}$-algebra となる．単位元 $\phi_{0,p}$ は，$G_{S.p}$ の単位元で値 1 をとる support が $Z_{S,p}K_{S,p}$ の関数である．

S の $\boldsymbol{Q}_p$ 上の Witt 指数を ν_p とし，$m = 2\nu_p + n_{0,p}$ により $n_{0,p}$ を定める（$0 \leq n_{0,p} \leq 4$）．S が maximal という仮定より，

$$L'_{0,p} := \{x \in L^*_{0.p} \mid S[x]/2 \in \boldsymbol{Z}_p\}$$

は $L_{0,p}$ を含む $\boldsymbol{Z}_p$ lattice で，$L'_{0,p}/L_{0,p}$ は $\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{Z}_p/p\boldsymbol{Z}_p$ 上のベクトル空間となる．その次元を ∂_p とであらわす（$0 \leq \partial_p \leq 2$）．ϕ_p，$\phi'_{0,p} \in \mathcal{H}_{S,p}$ を

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}\phi_p &= Z_{S,p}K_{S,p}\begin{pmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{pmatrix}K_{S,p}, \quad \phi_p(\begin{pmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{pmatrix}) = 1 \\ \operatorname{supp}\phi'_{0,p} &= Z_{S,p}K_{S,p}\{[0,\eta,0] \mid \eta \in L'_{0,p}\}K_{S,p}, \quad \phi'_{0,p}([0,\eta,0]) = p^{-\partial_p} \ (\eta \in L'_{0,p}) \end{aligned}$$

で定め，この 2 元で生成される $\mathcal{H}_{S,p}$ の部分環を $\mathcal{H}'_{S,p}$ で表す．$\mathcal{H}'_{S,p}$ は可換で，$\partial_p = 0,1$ のときは $\mathcal{H}_{S,p}$ に一致する．

$$\phi'_{0,p} * \phi'_{0,p} = \begin{cases} \phi_{0,p} & \partial_p = 0,1 \\ (1-p^{-1})\phi'_{0,p} + p^{-1}\phi_{0,p} & \partial_p = 2 \end{cases}$$

は容易に確かめられる．

$\boldsymbol{C}$-algebra 準同型 $\lambda_p : \mathcal{H}'_{S,p} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ に対し，その L 関数 $L_p(\lambda_p; s)$ を

$$\begin{aligned} L_p(\lambda_p; s) := &\left\{1 - (\lambda_p(\phi_p)p^{-(1+m/2)} - p^{\partial_p - n_{0,p}/2} + p^{-1+n_{0,p}/2})p^{-s} + \lambda_p(\phi'_{0,p})^{-1}p^{-2s}\right\}^{-1} \\ &\times \left\{\begin{array}{ll} (1-\chi_S(p)p^{-s})^{-1} & m : \mathrm{even} \\ 1 & m : \mathrm{odd} \end{array}\right\} \times B_{S,p}(p^{-s}) \ , \end{aligned}$$

$$B_{S,p}(T) = \begin{cases} 1 & \partial_p = 0 \text{ or } (n_{0,p}, \partial_p) = (2,1) \\ 1 + p^{1/2}T & (n_{0,p}, \partial_p) = (1,1) \\ (1+pT)(1+T) & (n_{0,p}, \partial_p) = (2,2) \\ 1 - p^{1/2}T & (n_{0,p}, \partial_p) = (3,1) \\ (1+p^{1/2}T)(1-p^{1/2}T) & (n_{0,p}, \partial_p) = (3,2) \\ (1-pT)(1-T) & (n_{0,p}, \partial_p) = (4,2) \end{cases}$$

で定める．ここで，m が偶数のとき，χ_S は $\boldsymbol{Q}_p(\sqrt{(-1)^{m/2}\det S})/\boldsymbol{Q}_p$ に対応する指標である．

$\otimes'_{p<\infty}\mathcal{H}'_{S,p}$ は convolution により Jacobi 尖点形式の空間 $\mathfrak{S}_{k,1}(\mathit{\Gamma}_S)$ に可換正規に作用し，$\mathfrak{S}_{k,1}(\mathit{\Gamma}_S)$ は同時固有関数からなる基底をもつ．

$$f * \phi = \lambda_f(\phi)f \qquad \text{for } {}^\forall\phi \in \otimes'_{p<\infty}\mathcal{H}'_{S,p}$$

のとき，$L(f; s) := \prod_p L_p(\lambda_p; s)$ により，f の L 関数を定める．

命題 5.1 (1) $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\mathit{\Gamma}_S)$ を Hecke 同時固有関数とする．$(a, \alpha) \in \boldsymbol{Z} \times L^*_0$ に対し，$T := \begin{pmatrix} S & S\alpha \\ {}^t\alpha S & 2a \end{pmatrix}$ とおく．T が正定値 maximal even integral のとき，次が成立する．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_f(an^2, \alpha n)n^{-(s+k-1-m/2)}$$

$$= a_f(a,\alpha)\cdot L(f;s)\left\{\begin{array}{cc}\zeta(2s)^{-1} & m:\mathrm{evem}\\ L(\chi_T;s+1/2)^{-1} & m:\mathrm{odd}\end{array}\right\}\times\prod_{p<\infty}B_{T,p}(p^{-(s+1/2)})^{-1}.$$

(2)　$L(f;s)$ のガンマ因子を

$$L_\infty(f;s) := \begin{cases} 2^{-s}\pi^{-3s/2}(\det S)^{s/2}\Gamma(s+k-1-m/2)\Gamma((s+a)/2) & m:\mathrm{even}\\ (2\pi)^{-s}(2^{-1}\det S)^{s/2}\Gamma(s+k-1-m/2) & m:\mathrm{odd}\end{cases}$$

で定める（a は $m\equiv 0,\ 2 \pmod 4$ に応じて 1, 0 を表す）. $\xi(f;s) := L_\infty(f;s)\cdot L(f;s)$ は全 s 平面に有理型関数として解析接続され，関数等式

$$\xi(f;s) = \left\{\begin{array}{cc} -1 & m\equiv 1,3 \pmod 8\\ 1 & \text{otherwise}\end{array}\right\}\xi(f;1-s)$$

を満たす.

5.2.　直交群の Hecke 環・L 関数

符号 $(2,m+2)$ の対称行列 Q の直交群 $G=O(Q)$ の $\boldsymbol{Q}_p$ 有理点 G_p の開 compact 部分群 K_p とその指数有限正規部分群 K_p^* を

$$K_p := G_p\cap GL_{m+4}(\boldsymbol{Z}_p)\supset K_p^* := \{u\in K_p \mid (u-1)L_p^*\subset L_p\}$$

で定める．G_p 上の両側 K_p 不変な compact support 関数の全体 $\mathcal{H}(G_p,K_p)$ は convolution により可換な $\boldsymbol{C}$-algebra をなし,

$$\mathcal{H}(G_p,K_p)\cong \boldsymbol{C}[X_1^\pm,\ldots,X_{\nu_p+2}^\pm]^{W_{\nu_p+2}}$$

となることは良く知られている．ここで，W_{ν_p+2} は $X_1,\ldots,X_{\nu_p+2}$ の置換と $X_i\longmapsto X_i^{-1}$ で生成される群（Weyl 群）である.

Λ_p を $\mathcal{H}(G_p,K_p)$ の指標とするとき，その局所 L 関数 $L_p(\Lambda_p;s)$ を

$$L_p(\Lambda_p;s)\cdot\Lambda_p\Big(\prod_{i=1}^{\nu_p+2}(1-X_ip^{-s})(1-X_i^{-1}p^{-s})\Big)$$
$$=\begin{cases} 1 & (n_{0,p},\partial_p)=(0,0)\text{ or }(1,0)\\ 1+p^{-s+1/2} & (n_{0,p},\partial_p)=(1,1)\\ (1-p^{-2s})^{-1} & (n_{0,p},\partial_p)=(2,0)\\ (1-p^{-s})^{-1} & (n_{0,p},\partial_p)=(2,1)\\ (1-p^{-s})^{-1}(1+p^{1-s}) & (n_{0,p},\partial_p)=(2,2)\\ (1-p^{-s-1/2})^{-1} & (n_{0,p},\partial_p)=(3,1)\\ (1-p^{-s-1/2})^{-1}(1+p^{-s+1/2}) & (n_{0,p},\partial_p)=(3,2)\\ (1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-s-1})^{-1} & (n_{0,p},\partial_p)=(4,2)\end{cases}$$

で定義する.

S が maximal という仮定の下で,

$$G_{1,A} = G_{1,\boldsymbol{Q}}G_{1,\infty}^0\prod_{p<\infty}K_{1,p}^*$$

が成り立つから，$F \in S_k(\Gamma^*)$ を G_A 上の保型形式とみなすことができる．

$\otimes_p' \mathcal{H}(G_p, K_p)$ は convolution により $S_k(\Gamma)$ に正規可換に作用し，同時固有関数からなる基底を持つ．

$$F * \Phi = \Lambda_F(\Phi) \cdot F \qquad \text{for } {}^\forall \Phi \in \otimes_p' \mathcal{H}(G_p, K_p)$$

のとき，$L(F; s) := \prod_p L_p(\Lambda_F; s)$ により，F の L 関数を定める．

5.3 Hecke 環の作用の compatibility

定理 5.2 Jacobi 尖点形式 $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ が $\otimes_p' \mathcal{H}_{S,p}'$ の同時固有関数とする．

(1) $\lambda_f(\phi_{0,p}') = 1$ ならば，$I(f)$ は 右 K_p 不変である．また，$\lambda_f(\phi_{0,p}') \neq 1$ ならば，$\lambda_f(\phi_{0,p}') = -p^{\partial_p - 1}$ であり，

$$\int_{K_p} I(f)(gu)\, du = 0$$

となる．

(2) $\lambda_f(\phi_{0,p}') = 1$ (for ${}^\forall p$) のとき，$I(f) \in S_k(\Gamma)$ で，$\otimes_{p<\infty}' \mathcal{H}_p(G_p, K_p)$ の同時固有関数となり，

$$L(I(f); s) = L(f; s) \prod_{j=0}^{m} \zeta(s + j - m/2)$$

が成り立つ．

注意 5.1 $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ が $\mathcal{H}_{S,p}$ の中心の同時固有関数であるとき，$I(f)$ は $\mathcal{H}(G_p, K_p^*)$ の中心の固有関数となる．また，上の (2) の関係式は，このような状況においても成立する．

§6. $\boldsymbol{I^* \circ I}$

前節と同様に，S を maximal とする．Maass 型リフト $I : \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S) \longrightarrow S_k(\Gamma^*)$ の Petersson 内関に関する adjoint を I^* で表す：

$$\langle f, I^*(F) \rangle_{k,1} = \langle I(f), F \rangle_k \qquad f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S),\ F \in S_k(\Gamma^*)\ .$$

定理 6.1 $k > 2m + 4$ とする．$f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ が Hecke 同時固有関数のとき，

$$\begin{aligned} I^* \circ I(f) &= C_{S,k} \cdot L(f; 1 + m/2) \cdot f \\ C_{S,k} &= (\det S)^{(m+1)/2} \prod_{j=1}^{[(m+1)/2]} |B_{2j}| \cdot (4\pi)^{-k} \Gamma(k) \\ &\quad \times \left\{ \begin{array}{cc} 2^{-m/2} \pi^{-1-m/2} & m : \text{even} \\ 2^{-(m+1)/2} \Gamma((m+3)/2)^{-1} & m : \text{odd} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{cc} 4 & -1 \in \Gamma^* \\ 2 & -1 \notin \Gamma^* \end{array} \right\} \end{aligned}$$

が成立する．

$I(f)$ を G_A 上の保型形式とみる．$\eta \in V_{1,\boldsymbol{Q}}$ に対し，(adelic) Fourier 係数を

$$F_\eta(g) := \int_{V_{1,\boldsymbol{Q}} \backslash V_{1,A}} F(n(x) g)\, \chi(-Q(\eta, x))\, dx$$

で定義する．$\eta = \begin{pmatrix} a \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \in L_1^*$，$i\eta \in \mathcal{D}$ で，$T := \begin{pmatrix} S & S\alpha \\ {}^t\alpha S & 2a \end{pmatrix}$ が maximal とする．H を T の直交群，H_1 を $T_1 := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -T & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ の直交群とし，各 p について，H_p，$H_{1,p}$ の開 compact 部分群 U_p^*，$U_{1,p}^*$ を

$$U_p^* = \{h \in H_p \cap GL_{m+1}(\boldsymbol{Z}_p) \mid (h-1)T^{-1} \in M_{m+1}(\boldsymbol{Z}_p)\}$$
$$U_{1,p}^* = \{h \in H_{1,p} \cap GL_{m+3}(\boldsymbol{Z}_p) \mid (h-1)T_1^{-1} \in M_{m+3}(\boldsymbol{Z}_p)\}$$

で定める．$H_{1,\infty}^0$ は $\mathcal{X} := \{(x,r) \in \boldsymbol{R}^{m+1} \times \boldsymbol{R} \mid r > 0\}$ に

$$h_1 \begin{pmatrix} r + T[x]/2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' + T[x'] \\ x' \\ 1 \end{pmatrix} \cdot J_{H_1}(h_1, (x,r))$$

により，$(x,r) \longmapsto h_1\langle(x,r)\rangle := (x', r')$ と推移的に作用する．$(1,0) \in \mathcal{X}$ の固定化部分群を $U_{1,\infty}^*$ とおく（$SO(m+1)$ に同型）．

H_A 上の右 $U_A^* := H_\infty^0 \prod_p U_p^*$ 不変な保型形式の空間を $S(U_A^*)$ で表す．$\varphi \in S(U_A^*)$ にから H_1 上の Eisenstein 級数を

$$E(h_1, \varphi; s) = \sum_{\gamma \in P_{1,\boldsymbol{Q}} \backslash H_{1,\boldsymbol{Q}}} \varphi(\beta(\gamma h_1))\, |\alpha(\gamma h_1)|_A^{s+(m+1)/2}$$
$$h_1 = \begin{pmatrix} \alpha(h_1) & * & * \\ & \beta(h_1) & * \\ & & \alpha(h_1)^{-1} \end{pmatrix} u(h_1) \in P_{1,A} U_{1,\infty}^* \prod_p U_{1,p}^*$$

と定める．

命題 6.2 $F \in S_k(\prod_p K_p^*)$，$\varphi \in S(U_A^*)$ のとき，

$$\int_{H_{1,\boldsymbol{Q}} \backslash H_{1,A}} F(h_1 g_\eta)\, E(h_1, \varphi; s-1/2)\, dh_1$$
$$= \int_{\boldsymbol{Q}_A^\times} \left\{ \int_{H_{\boldsymbol{Q}} \backslash H_A} F_\eta(\begin{pmatrix} t & & \\ & h & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta)\, \varphi(h)\, dh \right\} |t|^{s-(m+2)/2}\, d^\times t$$

が成り立つ．ここで，$g_\eta \in G_{1,\infty}^0$ を $g_\eta \cdot \mathcal{Z}_0 = i\eta(Q_1[\eta]/2)^{-1/2}$ となるようにとった．

命題 6.3 $\mathbf{1}$ で H_A 上恒等的に 1 をとる関数を表す．$E(h_1, \mathbf{1}; s)$ は $s = (m+1)/2$ で 1 位の極をもち，その留数は

$$\operatorname*{Res}_{s=1+m/2} E(h_1, \mathbf{1}; s) = \frac{(2\pi)^{(m+1)/2}}{(\det T)^{1/2}} \frac{\Gamma((m+1)/2)}{\Gamma(m+1)} \frac{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta(s)}{\zeta(m+1)} \prod_{p<\infty} \frac{B_{T,p}(p^{-(m+1)/2})}{B_{T,p}(p^{-(m+3)/2})}$$
$$\begin{cases} \dfrac{\zeta(m+1)}{\zeta(m+2)} & m : \text{even} \\ \dfrac{L(\chi_T; (m+1)/2)}{L(\chi_T; (m+3)/2)} & m : \text{odd} \end{cases}$$

である（h_1 に依存しないことに注意）.

命題 6.4　$H_{\boldsymbol{Q}}\backslash H_A$ の基本領域の体積は,

$$\mathrm{vol}(H_{\boldsymbol{Q}}\backslash H_A) = \mathrm{vol}(H_A^*)\, 2^{1-m}\pi^{-(m+1)(m+2)/2}\prod_{j=1}^{m+1}\Gamma(j/2)(\det T)^{m/2}\prod_{j=1}^{[m/2]}\zeta(2j)$$
$$\times\prod_{p<\infty}B_{T,p}(p^{-(m+1)/2})\begin{cases}1 & m:\mathrm{even}\\ L(\chi_T;(m+1)/2) & m:\mathrm{odd}\end{cases}$$

である.

定理 6.1 の主張は，$F = I(f)$ のとき，F_η が左 H_A 不変であることに注意すれば，上記 3 つの命題から従う.

参考文献

[**1**] K. Doi and H. Naganuma : On the functional equation of certain Dirichlet series, Invent. math. **9** (1969), 1 – 14.

[**2**] 宮崎直：theta 関数の変換公式，第 19 回整数論サマースクール，2011.

[**3**] H, Naganuma : On the coincidence of two Dirichlet series associated with cusp forms of Hecke's "Neben"-type and Hilbert modular forms over a real quadratic field, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 547 – 555.

[**4**] S. Niwa : Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta-functions, Nagoya Math. J. **56** (1974), 147 – 161.

[**5**] T. Oda : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. **231** (1977), 97 – 144.

[**6**] T. Shintani : On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight, Nagoya Math. J. **58** (1975), 83 – 126.

[**7**] S. Sugano : Jacobi forms and the theta lifting, Comment. Math. Univ. St. Pauli **44** (1995), 1 – 58.

[**8**] D. Zagier : Modular forms associated to real quadratic fields, Invent. math. **30** (1975), 1 – 46.

[**9**] D. Zagier : Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'apres H Maass), Seminaire Delange-Pisot-Poitou 1979-1980, Progr. Math. Vol. 5 (1980), 371 – 394, Birkhauser.