Siegel 保型形式の Hecke 理論

軍司圭一

1　はじめに

本稿では Siege 保型形式に対してどのように Hecke 作用素や L 関数が定義されるかについて解説する．一変数保型形式の場合，L 関数は Fourier 係数から定まる Dirichlet 級数として定義され，それが Hecke 作用素の固有値であれば Euler 積表示を持つという見方をされることが多い．しかし多変数の場合での L 関数はむしろ Euler 積表示の方であり，一般には必ずしも Fourier 係数と関係づけられるわけではない.

多変数の場合の Hecke 理論を古典的に扱おうとすると，複雑というよりもむしろ煩雑であり，なかなかすっきりと解説してある教科書は少ない．[Fr] などが標準的である．Andrianov の最近出された教科書 [An2] は，以前の教科書に比べれば，ややコンパクトにまとまっていると思う．

本稿では古典的な両側剰余類での Hecke 作用素の定義をまず行った後，一般論を意識した形で Satake 同型，L 関数の定義と繋がるような構成をしたつもりである．その際に van der Geer の記事 ([vG]) が非常に役に立った．より一般の立場での L 関数の定義については，[Na1] や [Yo] に解説がある．

2　古典的な Hecke 環の定義

以下の記号を定義する．

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathit{\Gamma} = \mathit{\Gamma}^n = Sp(n,\mathbb{Z}) = \{\gamma \in GL(2n,\mathbb{Z}) \mid {}^t\gamma J_n \gamma = J_n\}$$

$$G = GSp(n,\mathbb{Q})^+ = \{g \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^t g J_n g = \nu(g) J_n,\ \exists \nu(g) \in \mathbb{R}_{>0}\} \tag{2.1}$$

このとき任意の $g \in G$ に対して $g^{-1}\mathit{\Gamma} g$ は $\mathit{\Gamma}$ と commensurable になることが知られている．すなわち

$$[\mathit{\Gamma} : \mathit{\Gamma} \cap g^{-1}\mathit{\Gamma} g] < \infty, \quad [g^{-1}\mathit{\Gamma} g : \mathit{\Gamma} \cap g^{-1}\mathit{\Gamma} g] < \infty$$

が成り立つ．

$\mathit{\Gamma}$ に関する G の Hecke 環 $H(\mathit{\Gamma}, G) = H(\mathit{\Gamma}, G)_{\mathbb{C}}$ を次のようにする．まず集合としては両側剰余

類の $\mathbb{C}$ 係数形式線形和として

$$H(\Gamma,G)=\left\{\sum_{i:\text{ 有限}} a_i(\Gamma g_i\Gamma)\ \middle|\ g_i\in G,\ a_i\in\mathbb{C}\right\}$$

と定める．これに環構造を以下の要領で入れる: $L(\Gamma,G)=\{\sum_{i:\text{有限}} a_i(\Gamma g_i)\mid g_i\in G,\ a_i\in\mathbb{C}\}$ を左剰余類の形式線形和のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間とする．これには Γ による自然な右作用 $(\gamma,\ \sum_i a_i(\Gamma g_i))\mapsto\sum_i a_i(\Gamma g_i\gamma)$ がある．この作用による不変部分空間を $L(\Gamma,G)^\Gamma$ とすると，$L(\Gamma,G)^\Gamma$ には

$$\left(\sum_i a_i(\Gamma\gamma_i)\right)\left(\sum_j b_j(\Gamma\delta_j)\right)=\sum_{i,j}a_ib_j(\Gamma\gamma_i\delta_j)$$

で積が入る．一方 $\mathbb{C}$-ベクトル空間の同型

$$H(\Gamma,G)\simeq L(\Gamma,G)^\Gamma,\quad \Gamma g\Gamma=\bigcup_{i=1}^r\Gamma g_i \text{ に対して } \Gamma g\Gamma\mapsto\sum_{i=1}^r\Gamma g_i$$

があるので (全単射 $\Gamma\backslash\Gamma g\Gamma\simeq\Gamma\cap g^{-1}\Gamma g\backslash\Gamma$ より $[\Gamma g\Gamma:\Gamma]<\infty$ に注意)，この同型を通して $H(\Gamma,G)$ に積を入れることができる．

命題 2.1 $H(\Gamma,G)$ は可換環である．

証明には以下の補題を使う．

補題 2.2 任意の $g\in G$ に対して両側剰余類 $\Gamma g\Gamma$ の代表元として

$$\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_g,d_1,\ldots,d_g)\quad a_id_i=\nu(g),\ a_i|a_{i+1},\ a_g|d_g$$

の形の元が一意的にとれる ($\nu(g)$ の定義は (2.1))．

証明は例えば [An1, Theorem 3.28] を参照のこと．

命題 *2.1* の証明 G 上の involution $\vee$ を $g=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in G$ に対して $g^\vee=\begin{pmatrix}{}^tD&-{}^tB\\-{}^tC&{}^tA\end{pmatrix}=\nu(g)g^{-1}$ として定める．特に α が対角行列であれば $\alpha^\vee=J_n\alpha J_g^{-1}$ となるので，補題より任意の $g\in G$ に対して $\Gamma g\Gamma=\Gamma g^\vee\Gamma$ が成り立つ．$\vee$ が積の順番を入れ替える対合であるので命題の主張を得る． □

このようにして定めた Hecke 環は，各素数ごとの Hecke 環に分解することができる．すなわち $G^{(p)}=G\cap GL(2n,\mathbb{Z}[1/p])$ と定めると

$$H(\Gamma,G)=\bigotimes_{p:\text{素数}}H_p,\quad H_p=H(\Gamma,G^{(p)})$$

が成り立つ．特に $g\in G^{(p)}$ に対しては $\nu(g)$ は p べきになることに注意．

この性質より，H_p の構造を調べればよいことが分かるが，それには以下の命題が成り立つ．

命題 2.3

$$T(p) = \Gamma \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & p1_n \end{pmatrix}, \quad T_i(p^2) = \Gamma \begin{pmatrix} 1_i & & & \\ & p1_{n-i} & & \\ & & p^2 1_i & \\ & & & p1_{n-i} \end{pmatrix} \Gamma \quad (0 \leq i \leq n)$$

と定める．このとき

$$H_p = \mathbb{C}[T(p), T_i(p^2)\ (1 \leq i \leq n)]$$

が成り立つ．

(cf. [An1, Theorem 3.40])

この命題で Hecke 環の生成元は分かったが，より明快な環構造を決めるために，次節で Satake 同型と呼ばれる同型射を定義することにする．

3 局所 Hecke 環と Satake 同型

以下の記号を定義する．

$$G_p = GSp(n, \mathbb{Q}_p), \quad K_p = G_p \cap GL(2n, \mathbb{Z}_p)$$

$$\mathcal{H}_p = \left\{ \phi \colon G_p \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \text{ は両側 } K_p\text{-不変 i.e. } \phi(k_1 g k_2) = \phi(g),\ \forall k_1, k_2 \in K_p \\ \phi \text{ は局所定数かつコンパクト台を持つ} \end{array} \right\}$$

$\mathcal{H}_p$ には convolution

$$\phi_1 * \phi_2(h) = \int_{G_p} \phi_1(g)\phi_2(g^{-1}h)dg$$

で積が入り，$\mathbb{C}$-代数の構造を持つ．このとき以下の補題が成り立つことが容易に分かる．

補題 3.1

$$H_p = H(\Gamma, G^{(p)}) \simeq \mathcal{H}_p, \quad \Gamma g \Gamma \mapsto \mathrm{ch}(K_p g K_p)$$

なる $\mathbb{C}$-代数としての同型がある．

以下 $\mathcal{H}_p$ の構造を調べるが，そのために代数群 GSp の部分群を次で定義する．

$$T = \{\mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_g, v_1, \ldots, v_g) \mid u_1 v_1 = u_2 v_2 = \cdots = u_g v_g\} \subset GSp$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \nu {}^t\!A^{-1} \end{pmatrix} \in GSp \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ * & \ddots & \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

このとき $P = TN$ は GSp の minimal parabolic subgroup になっている．

GSp の極大トーラスである T の Hecke 環:

$$\mathcal{H}_p(T) = \{\psi \colon T(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{C} \mid \text{両側 } T(\mathbb{Z}_p)\text{-不変，局所定数，コンパクト台 }\}$$

の構造は容易に分かる．すなわち T は GL_1 の $n+1$ 個の直積と同型であることから

$$\mathcal{H}_p(T) = \mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \dots, X_n^{\pm}]$$

となることが分かる．ここで

$$X_0 = \mathrm{ch}\left(T(\mathbb{Z}_p)\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & p1_n \end{pmatrix} T(\mathbb{Z}_p)\right),$$

$$X_i = \mathrm{ch}\left(T(\mathbb{Z}_p)\begin{pmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i^{-1} \end{pmatrix} T(\mathbb{Z}_p)\right), \quad S_i = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\overset{i}{p},1,\dots,1)$$

とおいた．

T の GSp における正規化群を $N(T) = \{g \in GSp \mid g^{-1}Tg \subset T\}$ で表す．このとき GSp の Weyl 群 $W = N(T)/T$ は共役作用で T に作用する．

補題 3.2 群同型 $W \simeq \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ が成り立つ．ここに $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群であり，$T \ni t = \mathrm{diag}(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n)$ に対して n 元集合 $\{(u_1,v_1),(u_2,v_2),\dots,(u_n,v_n)\}$ の置換として作用する．また $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \ni \varepsilon_i$(第 i 成分のみ 1 で他は 0 である元) は u_i と v_i との入れ替えとして作用する．

W は T に作用するから，自然に T の Hecke 環 $\mathcal{H}_p(T)$ にも作用している．補題より $\mathcal{H}_p(T) = \mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \dots, X_n^{\pm}]$ への $W = \mathfrak{S}_g \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の作用は，$\mathfrak{S}_g$ は $X_1,\dots,X_n$ の置換として作用し，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \ni \varepsilon_i$ の作用は

$$\begin{cases} X_0 \longmapsto X_0X_i \\ X_i \longmapsto X_i^{-1} \\ X_j \longmapsto X_j \quad (j \neq i) \end{cases}$$

で与えられることが分かる．$\mathcal{H}_p(T)$ の W-不変部分代数を $\mathcal{H}_p(T)^W$ で表す．

$\mathcal{H}_p$ から $\mathcal{H}_p(T)$ への $\mathbb{C}$-代数の準同型 (**Satake 変換**) を以下で定義する．

$$S\colon \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_p(T), \quad S(f)(g) = \delta(t)^{1/2}\int_N f(tn)\,dn$$

ここで $\delta(t)$ は modulus 関数と呼ばれ，$\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(N)$ としたときに

$$\delta(t) = |\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}}(t)|_p$$

で与えられる．具体的には $t = \mathrm{diag}(u_1,\dots,u_g,u_0u_1^{-1},\dots,u_0u_n^{-1})$ に対して

$$\delta(t) = u_0^{-n(n+1)/2}u_1^2u_2^4\cdots u_n^{2n}$$

である．

定理 3.3 Satake 変換は $\mathbb{C}$-代数の同型

$$\mathcal{H}_p \simeq \mathcal{H}_p(T)^W = \mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \dots, X_n^{\pm}]^W$$

を引き起こす．

原論文は [Sa] である．一般的に証明するには，p 進代数群の構造定理である Bruhat-Tits 理論が必要であり，すべてを理解するのはなかなか難しい．個人的には [Ca] の証明が読みやすいと思う．

これによって $\mathcal{H}_p$ の構造が分かったが，実際に同型射を直接書き下すこともできる．まず $M \in G_p$ に対して，両側剰余類 KMK は

$$KMK = \coprod_i M_i K, \quad M_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ 0 & p^l\, {}^t\!A_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} p^{r_{i1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & p^{r_{in}} \end{pmatrix}$$

と分解される．ここで $p^l = \nu(M)$ は i によらない数である．

命題 3.4 上記のように分解される M に対して

$$\mathrm{ch}(KMK) \mapsto X_0^l \sum_i \prod_{j=1}^n (p^{-j} X_j)^{r_{ij}}$$

で与えられる写像は，$\mathcal{H}_p$ から $\mathbb{C}[X_0^\pm, X_1^\pm, \dots X_n^\pm]^W$ への $\mathbb{C}$-代数の同型射を与える．

注 実は定理 3.3 と命題 3.4 で与えられる写像は X_0 を p べき倍しただけのずれが生じており，定理 3.3 を直接書き下すと

$$S(\mathrm{ch}(KMK)) \mapsto p^{ln(n+1)/4} X_0^l \sum_i \prod_{j=1}^n (p^{-j} X_j)^{r_{ij}}$$

となる (cf. [AS, Lemma 1])．本稿では古典的な書き方で統一するため，以後同型射を命題 3.4 でとることにする．

4 Siege 保型形式の L 関数

$\mathbb{H}_n = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}(Z) > 0\ (\text{正定値})\}$ を Siegel 上半空間とする．$GSp(n,\mathbb{R})^+$ は $\mathbb{H}_n$ に

$$g\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \in \mathbb{H}, \quad g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$$

で作用する．$g \in GSp(n,\mathbb{R})^+$ 及び $k \in \mathbb{Z}$ と $\mathbb{H}_n$ 上の関数 f に対して

$$f|_k g(Z) = \nu(g)^{nk-n(n+1)/2} \det(CZ+D)^{-k} f(g\langle Z\rangle) \tag{4.1}$$

と定める．

定義 4.1 $\mathbb{H}_n$ 上の正則関数 f が $\Gamma = Sp(n,\mathbb{Z})$ に関する重さ k の Siegel 保型形式であるとは，次の条件を満たすことである．

(1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f|_k\gamma = f$ が成り立つ.

(2) $n = 1$ のとき，f は cusp で正則，すなわち Fourier 展開

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a(\nu) e^{2\pi i \nu z}$$

を持つ.

$n \geq 2$ に対しては (2) に対応する条件は自動的に満たされることが知られている (**Koecher 原理**). すなわち f は Fourier 展開

$$f(Z) = \sum_{S_n^* \ni A \geq 0} C(A) e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(AZ)} \tag{4.2}$$

を持つ．ここで S_n^* は半整数対称行列，すなわち対角成分が整数かつそれ以外が半整数の対称行列全体を表し，$A \geq 0$ は A が半正定置であることを示す．さらに f が条件

(3) $\det(\mathrm{Im}(Z))^{k/2}|f(Z)|$ が有界

を満たすとき f は cusp 形式であるという．重さ k の保型形式の空間全体を $M_k(\Gamma)$，cusp 形式の空間全体を $S_k(\Gamma)$ で表す.

Siegel 保型形式の空間への Hecke 環の作用は次で与えられる．$H(\Gamma, G) \ni \Gamma g \Gamma$ を左剰余類に分解して $\Gamma\gamma\Gamma = \bigcup_{i=1}^r \Gamma\gamma_i$ としたとき

$$f|_k[\Gamma g \Gamma] = \sum_{i=1}^{r} f|_k \gamma_i$$

と定める．この作用で，$H(\Gamma, G)$ は $M_k(\Gamma)$ および $S_k(\Gamma)$ に作用していることが分かる.

注　[Gu1] と同様に，Siegel 保型形式はアデール上に持ち上げることができる．すなわち $\mathbb{A} = \mathbb{A}_Q$ を $\mathbb{Q}$ のアデール環としたとき，分解

$$GSp(n, \mathbb{A}) = GSp(n, \mathbb{Q})\, GSp(n, \mathbb{R})^+ \prod_p GSp(n, \mathbb{Z}_p)$$

が成り立つ (強近似定理)．この分解に従って $g = \gamma g_\infty k$ と書くとき，$f \in M_k(\Gamma)$ に対して $GSp(n, \mathbb{A})$ 上の関数 φ_f を

$$\varphi_f(g) = \det(Ci + D)^{-k} f(g_\infty \langle i 1_n \rangle), \quad g_\infty = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

と定めることで，保型形式を Siegel 上半空間上の関数から $GSp(n, \mathbb{A})$ 上の関数に持ち上げることができる．このとき定数倍のずれを除いて，$g \in G_p$ に対して

$$f|_k[\Gamma g \Gamma] = \varphi_f * \mathrm{ch}(K_p g K_p)$$

が成り立つ．ここで $*$ は convolution であり，$GSp(n,\mathbb{A})$ 上の適当な関数 φ, ψ に対して

$$\varphi * \psi(g) = \int_{GSp}(n,\mathbb{A})\varphi(gh)\psi(h^{-1})\,dh$$

と定める．

$S_k(\Gamma)$ 上の Petersson 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を以下で定義する．まず $Z = X + iY \in \mathbb{H}_n$ として $\mathbb{H}_n$ 上の測度 d^*Z を

$$d^*Z = \det Y^{-(g+1)} dXdY$$

で定める．ただし dX 及び dY は通常の Lebesgue 測度とする．このとき d^*Z は $Sp(n,\mathbb{R})$ の作用に関する不変測度になっていることが示される．さて，$f, g \in S_k(\Gamma)$ に対して

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}_n} f(Z)\overline{g(Z)}\det(Y)^k d^*Z$$

とおき，$S_k(\Gamma)$ に内積を入れる．cusp 形式の定義より右辺の積分が収束することがわかる．このとき $\Gamma\alpha\Gamma \in H(G)$ に対して

$$\langle f|_k\Gamma\alpha\Gamma, g\rangle = \langle f, g|_k\Gamma\alpha\Gamma\rangle$$

が成り立つ．$H(G)$ は可換環であったから，$S_k(\Gamma)$ は $H(G)$ の作用に関して同時対角化される．

$f \in S_k(\Gamma)$ を Hecke 同時固有関数とする．このとき任意の $X \in H(G)$ に関して $f|X = \lambda(X)_f f$ が成り立つから，命題 3.4 により各素数 p に対して

$$\lambda_f\colon H_p = \mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]^W \to \mathbb{C}$$

という準同型がある．$\mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]$ は $\mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]^W$ 上 integral であるから，λ_f は $\mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}] \to \mathbb{C}$ に持ち上がる: すなわち λ_f は $X_0, X_1, \ldots, X_n$ の行き先で決まり，この対応により $\mathbb{C}$-代数としての射 $H_p \to \mathbb{C}$ 全体は，集合

$$(\mathbb{C}^{\times})^{n+1}/W$$

と同一視できることがわかる．

定義 4.2 f を同時固有関数とする．このとき各素数 p に対して上の同一視を通して定まる $(n+1)$ 個の複素数の組

$$\{\alpha_{p,0}, \alpha_{p,1}, \ldots, \alpha_{p,n}\}$$

を f の **Satake パラメーター**と呼ぶ.

Siegel 保型形式の L 関数は，上記の Satake パラメーターを用いて定義される．後に実例を挙げるが，一変数の場合，Satake パラメーターは Hecke 作用素の固有値のようなものであり，これらを用いた無限積が L 関数を与えることになる．直観的な説明としては Weyl 群不変になるように積を作ればよいということになるが，以下で定義するものは，もちろんきちんとした意味を持っている．

定義 4.3 (1) f を同時固有関数とし，$\{\alpha_{p,0}, \alpha_{p,1}, \ldots, \alpha_{p,n}\}$ を Satake パラメーターとする．このとき 2 種類の局所 L 因子を

$$L^p_{\mathrm{st}}(f,t) = (1-t)^{-1}\prod_{i=1}^{n}\bigl(1-\alpha_{p,i}t\bigr)^{-1}\bigl(1-\alpha_{p,i}{}^{-1}t\bigr)^{-1}$$

および

$$L^p_{\mathrm{spin}}(f,t) = (1-\alpha_{p,0}t)^{-1}\prod_{r=1}^{n}\prod_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n}(1-\alpha_{p,0}\alpha_{p,i_1}\cdots\alpha_{p,i_r}t)^{-1}$$

で定める．

(2) 同時固有関数 f と $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$L_{\mathrm{st}}(f,s) = \prod_p L^p_{\mathrm{st}}(f,p^{-s})$$

$$L_{\mathrm{spin}}(f,s) = \prod_p L^p_{\mathrm{spin}}(f,p^{-s})$$

と定める．右辺は共に $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束し，この範囲で s に関する正則関数を定める．

$L_{\mathrm{st}}(f,s)$ を standard L 関数，$L_{\mathrm{spin}}(f,s)$ を spinor L 関数と呼ぶ.

注 spinor L 関数に現れる Euler 因子は次のような特徴付けがある．$L_{\mathrm{spin}}(t)$ で $L_{\mathrm{spin}}(f,t)$ の α_i を X_i に置き換えた $\mathbb{C}[X_0^{\pm},\ldots,X_n^{\pm}]^W[t] \simeq \mathcal{H}_p[t]$ の元 (の逆数) を表す．$T(p^k)$ を $\{g \in G_p \cap M_{2n}(\mathbb{Z}_p) \mid \nu(g) \in p^k\}$ の特性関数に対応する $\mathcal{H}_p$ の元とする．このとき $\mathcal{H}_p$ 係数の形式的べき級数

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} T(p^k)t^k$$

は，ある次数が 2^n-2 の多項式 $P_n(t)$ を用いて

$$H_n(t) = P_n(t)L_{\mathrm{spin}}(p^{-n(n+1)/2}t)$$

と表わされる．すなわち上のような母関数の分母部分が spinor L 因子である．

注 L 関数は代数群 Sp_n の双対群 (定義は [Yo] 参照, そこでは connected L-group と書かれている) の表現と関係がある．GSp_n の双対群は $GSpin(2n+1,\mathbb{C}) = \bigl(\mathbb{C}^1 \times Spin(2n+1,\mathbb{C})\bigr)/Z$, ($Z$ は，$Spin(2n+1,\mathbb{C})$ の中心の位数 2 の元を a と書いたとき $(-1,a)$ で生成される群) であり，スピン群 $Spin_n$ は分裂しない完全列

$$1 \to \{\pm 1\} \to Spin_n \to SO_n \to 1$$

で定義される代数群である．

standard L 関数は $Spin_{n+1}$ から SO_{n+1} への写像を経由して得られる SO_{n+1} の standard 表現に対応しており，spinor L 関数は，spin 表現と呼ばれる SO_{n+1} を経由しない表現に対応している．表現の次数はそれぞれ $2n+1$ および 2^n であり，これは局所 L 因子の次数と一致していることに注意.

L 関数の解析接続・関数等式については以下ことが知られている.

定理 4.1 (Böcheler [Bö]) $f \in M_k(\Gamma^n)$ を同時固有関数とし，ε を n が奇数のとき 1，偶数のとき 0 とおく．このとき

$$\Lambda(f,s) = (2\pi)^{-ns}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(s+k-j)L_{\mathrm{st}}(f,s)$$

は全 s-平面に有理型に解析接続し，関数等式

$$\Lambda(f,s) = \Lambda(f,-s)$$

を満たす.

予想 4.2 $f \in M_k(\Gamma^n)$ を同時固有関数としたとき，$L_{\mathrm{spin}}(f,s)$ は全 s-平面に有理型に解析接続され

$$s \longleftrightarrow nk - \frac{n(n+1)}{2} + 1 - s$$

の形の関数等式を持つであろう.

この予想は $n=2$ のときに Andrianov ([An1]) によって肯定的に解決されている.

定理 4.3 (Andrianov)

$$\Psi(f,s) = \Gamma(s)\Gamma(s-k+2)(2\pi)^{-2s}L_{\mathrm{spin}}(f,s)$$

とおく．このとき $\Psi(f,s)$ は高々有限個の極を除いて全平面に正則に解析接続され，関数等式

$$\Psi(f,2k-2-s) = (-1)^k\Psi(f,s)$$

を満たす.

$n=3$ のとき Asgari-Schmidt によって L_{spin} の解析接続のみが示されている ([AS]).

5 実例

以下，いくつかの簡単な場合についての L 関数の具体形を調べることにするが，その前に重要な関係式を一つ示しておく．n は一般とし，$M = p1_{2n} = \mathrm{diag}(p,\ldots,p) \in G$ をとる．このとき Satake 同型 (3.4) により，

$$\mathrm{ch}(\Gamma M \Gamma) = p^{-n(n+1)/2}X_0^2X_1\cdots X_n$$

が成り立つ．一方 (4.1) から M は $f \in M_k(\Gamma)$ に $f_k|M = p^{nk-n(n+1)}f$ で作用する．よって同時固有関数 f の Satake パラメーター $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$ には，関係式

$$\alpha_0^2\alpha_1 \cdots \alpha_n = p^{nk-n(n+1)/2} \tag{5.1}$$

が成り立つ．

5.1 一変数保型形式の場合

$n = 1$ すなわち $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ のときを考える．通常の T_p 作用素は $\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma$ の作用であり，

$$\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma = \Gamma \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma \amalg \coprod_{0 \le b \le p-1} \begin{pmatrix} p & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma$$

と分解されるから，命題 3.4 の写像で $X_0 + X_0X_1 \in \mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}]^W$ に移ることが分かる．よって $f \in M_k(\Gamma)$ を正規化された同時固有関数，$T(p)f = \lambda_p f$ とし，Satake prameter を $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ とすると，(5.1) と合わせて

$$\alpha_0 + \alpha_0\alpha_1 = \lambda_p, \quad \alpha_0^2\alpha_1 = p^{k-1}$$

を得る．

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{spin}}(f, s) &= \prod_p (1 - \alpha_0 p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_0\alpha_1 p^{-s})^{-1} \\ &= \prod_p (1 - \lambda_p p^{-s} + p^{k-1-2s}) \end{aligned}$$

であるから，spinor L 関数は通常の保型 L 関数 $L(f, s)$ に一致する．なおこのときは $Spin_3 = SL_2$ であり，双対群 $GSpin(3, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C})$，その spinor 表現は $GL(2, \mathbb{C})$ の standard 表現に他ならない．

一方 standard L 関数を考えると

$$L_{\mathrm{st}}(f, s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_1 p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_1^{-1} p^{-s})^{-1}$$

であるが，$1 - \lambda_p t + p^{k-1}t^2 = (1 - \alpha_0 t)(1 - \alpha_0\alpha_1 t)$ から，

$$\alpha_0^2 = p^{k-1}\alpha_1^{-1}, \quad \alpha_0 \cdot (\alpha_0\alpha_1) = p^{k-1}, \quad (\alpha_0\alpha_1)^2 = p^{k-1}\alpha_1$$

となるので，

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{st}}(f, s-k+1) &= \prod_p (1 - \alpha_0^2 p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_0^2\alpha_1 p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_0^2\alpha_1^2 p^{-s})^{-1} \\ &= L(f, s, \mathrm{Sym}^2) = \zeta(2s - 2k + 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n^2)}{n^s} \end{aligned}$$

が成り立つ (最後の等式については例えば [Is] などに解説がある)．すなわち standard L 関数は 2 次対称積 L 関数である．accidental 同型から

$$Spin(3,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{2:1} SO(3,\mathbb{C}) \hookrightarrow GL(3,\mathbb{C})$$

という写像があるが ([Na2] 参照: そこでは $SL(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{2:1} SO(2,1)$ となっているが $\mathbb{C}$ 係数にしても全く同じように証明できる)，これは SL_2 の 2 次の対称積表現と一致している．これが対称積 L 関数が standard L 関数と対応している理由である．

5.2 Eisenstein 級数

保型形式として Siegel Eisenstein 級数

$$E_k^n(Z) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty^n \backslash \Gamma^n} \det(CZ+D)^{-k}$$

を考える．ここに k は $k \geq n+2$ を満たす偶数であり，

$$\Gamma_\infty^n = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \Gamma^n \right\}$$

とする．$n=1$ の場合には

$$2\zeta(k)E_k^1(z) = \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} (cz+d)^{-k}$$

である．右辺の級数は広義一様絶対収束し，$E_k^n(Z) \in M_k(\Gamma^n)$ である．また $E_k^n(Z)$ は Hecke 作用素の同時固有関数になっている (後述の Zharkovskaya の関係式より従う)．

命題 5.1 Siegel Eisensetein 級数 E_k^n の Satake パラメーターは

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_i = p^{k-i}\,(1 \leq i \leq n)$$

ととることができる．

実際 $n=1$ のときには E_k^1 の T_p 作用素の固有値が $1+p^{k-1}$ であることより容易に従う．一般の n に対してこれを証すには，Zharkovskaya の関係式と呼ばれるものを使う．そのためにまず Siegel 保型形式の次数を下げる Φ 作用素を次で定義する．

定義 5.1 $f \in M_k(\Gamma^n)$ に対して $\Phi(f) \in M_k(\Gamma^{n-1})$ を

$$\Phi(f)(z) = \lim_{\lambda\to\infty} f\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}\right), \quad z \in \mathbb{H}_{n-1}$$

で定義する．

f の Fourier 展開の形 (4.2) に注意すると，右辺の極限は収束し $\Phi(f)$ は

$$\Phi(f)(z) = \sum_{S_{n-1}^* \ni a \geq 0} C\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) e^{2\pi iaz}$$

と Fourier 展開されることが分かる．特に

$$\Phi(E_k^n) = E_k^{n-1}$$

である (cf [Gu2, §3.3]).

定理 5.2 (Zharkovskaya の関係式) $\mathbb{C}$-代数の射 $\psi\colon H_p(\Gamma^n) \to H_p(\Gamma^{n-1})$ を

$$(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n) \longmapsto (p^{k-n}X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, p^{n-k})$$

で定める．このとき $f \in M_k(\Gamma^n)$ と $T \in H_p(\Gamma^n)$ に対して

$$\Phi(f|_k T) = \Phi(f)|_k \psi(T)$$

が成り立つ.

証明は例えば [An2, Theorem 4.19].

例えば $n = 2$ のとき，Zharkovskaya の関係式より Satake パラメーターを

$$\alpha_0 = p^{k-2}, \quad \alpha_1 = p^{k-1}, \quad \alpha_2 = p^{2-k}$$

としてよいことが分かるが，補題 3.2 の記号で $W \ni \varepsilon_2$ を作用させることで，

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = p^{k-1}, \quad \alpha_2 = p^{k-2}$$

とできることが分かる．

命題 5.1 より特に

$$L_{\mathrm{st}}(E_k^n, s) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{n} \zeta(s-k+i)\zeta(s+k-i)$$

が成り立つ.

参考文献

[An1] A.N. Andrianov “Euler prodcts associated with Siegel modular forms of degree two”, Russ. Math. Surveys **29**, 3, 45-116 (1974).

[An2] A.N. Andrianov “Indroduction to Siegel modura forms and Dirichlet series”, Universitext. Springer, New York (2009).

[AS] M. Asgari and R. Schmidt, “Siegel modular forms and representations”. Manuscripta Math. **104**, no. 2, 173-200 (2001).

[Bö] S. Böcherer "Über die Funktionalgelichung automprpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe". J. reine angew. Math. **362**, 146-168 (1985).

[Ca] P. Cartier, "Representations of p-adic groups: a survey. Automorphic forms, representations and L-functions", Part 1, pp. 111-155, Proc. Sympos. Pure Math., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1979).

[Fr] E. Freitag, "Siegelsche Modulfunktionen", Grundl. Math. Wiss. **254**. Springer-Verlag, Berlin.

[vG] G. van der Geer, "Siegel modular forms and their applications." The 1-2-3 of modular forms, 181-245, Universitext, Springer, Berlin, (2008)

[Gu1] 軍司圭一, "GL_2 の保型形式と表現論", 本報告集

[Gu2] 軍司圭一, "Siegel Eisensetein 級数の Fourier 展開", 本報告集

[Is] 石井卓, 「一変数保型形式に付随する L 関数」, 第 16 回整数論サマースクール「保型 L 関数」報告集 (2009), p3-36.

[Na1] 成田宏秋, 「保型 L 関数の定義」, 第 16 回整数論サマースクール「保型 L 関数」報告集 (2009), p137-169.

[Na2] 成田宏秋, "Accidental 同型について", 本報告集

[Sa] I. Satake, "Theory of spherical functions on reductive groups over p-adic fields", Publ. Math. I.H.E.S. **18**, 5-69 (1963).

[Yo] 吉田敬之, "Functoriality Principle", 本報告集