Accidental 同型について

熊本大学大学院自然科学研究科　成田宏秋

1　導入

今回のサマースクールの目的の一つに「リフティングの原理を理解する」というのがある．例えば志村対応 ([Sak], 参照) の背後には「テータリフト (またはテータ対応)」([Mat] 参照) というリフティングの原理がある．一般にテータリフトは “dual pair” という 2 つの簡約群の組に対して定義される．これはシンプレクティック群の中で双方がもう片方の中心化群になっているというものである．志村対応は実 Lie 群のレベルでは, $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ ($SL(2,\mathbb{R})$ の 2 重被覆群) から $SL(2,\mathbb{R})$ へのテータリフトということになるが, dual pair の中に $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ という組み合わせはない．事実, $SL(2,\mathbb{R})$ を含む dual pair の片割れは直交群 $O(p,q)$ である．ではなぜ志村対応はテータリフトと理解できるか？ そこで必要になるのが低次元 Lie 群の “**Accidental 同型**” である．実際, $SL(2,\mathbb{R})$ は直交群との次の同型対応が知られている．

$$SL(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\} \simeq O_0(2,1).$$

ここに $O_0(2,1)$ は符号 $(2+,1-)$ の直交群の単位元の連結成分を表す．つまり志村対応の背後には **$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ から $O(2,1)$ へのテータリフト** がある．このような低次元 Lie 群が関わるリフティングの多くは Accidental 同型を使って, その背後にある原理が理解されることがしばしばある．志村対応以外の代表的なリフトを列挙すると, 新谷リフト, 斉藤-黒川リフト, 土井-長沼リフトなどがあるが, 今挙げた 3 つはすべてテータリフトとして理解され, 後者の 2 つは次の Accidental 同型を考慮する必要がある．

$$Sp(2;\mathbb{R})/\{\pm 1\} \simeq O_0(2,3), \quad (SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1_2 \times 1_2)\} \simeq O_0(2,2)$$

本稿では, 最初に古典型 Lie 群と Lie 環の分類を Dynkin 図形及び Vogan 図形と共に与えることから始める．その次に Helgason [He] に従い低次元 Lie 環の Accidental 同型の表を与え, それに相当する Lie 群のレベルでの Accidental 同型を与える．最後に Accidental 同型が関わる, 低次元 Lie 群上の保型形式のリフティングについて概説する．

謝辞

Dynkin 図形と Vogan 図形の記述に多大な協力をして頂いた早田孝博さんに感謝の意を表します.

2 古典型単純複素 Lie 群, Lie 環及びその実型式の分類

この節では, 古典型単純 Lie 群及び Lie 環の記述に必要な実数体上の多元環を導入し, 次に単純 Lie 群と Lie 環を分類をするためにルート系とそれに付随する Dynkin 図形について Humphrey[Hu] に基づき簡単に復習する. そして Dynkin 図形を与えることで古典型単純複素 Lie 群及び Lie 環の分類を記述し, 加えて古典複素 Lie 群と Lie 環の実形式を与え, それを分類する Vogan 図形を用意する.

2.1 実数体上の多元環の準備

ここでは, 以降古典型 Lie 群及び Lie 環を記述するために必要な, 実数体上の多元環と関連する記号を用意する.

(1) 実数体上の斜体：

よく知られているように, 実数体上の斜体は同型を除いて, 実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$ そして Hamilton の四元数環 $\mathbb{H}$ の 3 つに限られる. $\mathbb{H}$ は $\{1,\ i,\ j,\ k\}$ を基底として持ち, $\{i,\ j,\ k\}$ は以下の関係式で定義される.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k.$$

(2) 分裂複素数と不定符号の四元数環：

実数体 $\mathbb{R}$ に $i'^2 = 1$ を満たす文字 i' を添加して得られる実代数 $\mathbb{R} + \mathbb{R}i'$ を $\mathbb{C}'$ と記す. これを分裂複素数と呼ぶことにする. 実数体上の不定符号の四元数環 $\mathbb{H}'$ は $\{1,\ i',\ j',\ k'\}$ を基底として持ち, $\{i',\ j',\ k'\}$ は以下の関係式で定義される.

$$i'^2 = k'^2 = 1, \quad j'^2 = -1,\ i'j' = -j'i' = k'.$$

これら 2 つについて以下の実代数としての同型が成り立つ.

$$\mathbb{C}' \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad \mathbb{H}' \simeq M(2, \mathbb{R}).$$

ここに $M(2, \mathbb{R})$ は実 2 次正方行列の成す実代数を表す.

(3) 行列代数：

K を (1) と (2) で挙げた実代数のうちのいずれかとする．K は主対合と呼ばれる位数 2 以下の自己同型

$$K \ni x \to \bar{x} \in K$$

を持つ．$K=\mathbb{R},\ \mathbb{C}$ の時は恒等写像ないしは複素共役であるが他の場合は以下で与えられる．

$$\begin{cases} \mathbb{C}' \ni x+yi' \mapsto x-yi' \in \mathbb{C}' & (K=\mathbb{C}'), \\ \mathbb{H} \ni x = x_0+x_1i+x_2j+x_3k \mapsto \bar{x} := x_0-x_1i-x_2j-x_3k & (K=\mathbb{H}), \\ \mathbb{H}' \ni x' = x_0'+x_1'i'+x_2'j'+x_3'k' \mapsto \bar{x} = x_0'-x_1'i'-x_2'j'-x_3'k' & (K=\mathbb{H}'). \end{cases}$$

$\mathbb{H}'$ の主対合は $M(2,\mathbb{R})$ の主対合

$$M(2,\mathbb{R}) \ni X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto {}^{\iota}X := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R})$$

と本質的に同じである．

行列代数 $M(n,K)$ に対してトレースとノルムを定義する．$K=\mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{C}'$ のときはトレースとノルムはそれぞれ通常の K 上の行列環のトレース Tr と行列式 det とする．$K=\mathbb{H},\ \mathbb{H}'$ の時は $M(n,K)$ の複素化 $M(n,K)\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{C} \simeq M(2n,\mathbb{C})$ の複素行列代数としてのトレース及び行列式の $M(n,K)$ への制限として定義される．これは $M(n,K)$ の被約トレース, 被約ノルムと呼ばれ, それぞれ $\tau_K^n,\ N_K^n$ と書くことにする．$n=1$ のときは単に $\tau_K,\ N_K$ と書く．これは次のように記述される．

$$\tau_K(x) = x+\bar{x},\ N_K(x) = x\bar{x}\ (x \in K)$$

以下では $X \in M(n,K)$ に対し, $\bar{X}$ を X の各成分に主対合を施したものを表すことにする．

2.2 ルート系の復習 ([Hu, Chap.III. Section 9, 10] 参照)

有限次元実ベクトル空間 E を与え, これが内積 (α,β) $(\alpha,\ \beta \in E)$ を持つとする．

定義 2.1. 実ベクトル空間 E の部分集合 Φ が**ルート系**であるとは, 以下の公理を満たすことである．
(1) 集合 Φ は有限集合で, E を張る．

(2) 各 $\alpha \in \Phi$ の定数倍で Φ に入るものは $\pm\alpha$ に限る.
(3) 各 $\alpha \in \Phi$ に付随する鏡映 $\sigma_\alpha \in GL(E)$(reflection) は Φ を保つ.
(4) 任意の 2 つの $\alpha,\ \beta \in \Phi$ に対して $\langle \alpha, \beta \rangle := \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ が成り立つ.

ここで鏡映 σ_α とは次で定義される.

$$\sigma_\alpha(\beta) := \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha \quad (\beta \in E).$$

これは $\beta = \alpha$ を $-\alpha$ に移し, α が張る 1 次元空間の補空間の各元を固定するということで特徴付けられる.

ルート系 Φ は次の条件を満たす部分集合 Δ を持つ.

(1) Δ は E の基底を与える.
(2) 任意の $\beta \in \Phi$ は, すべてが負でないあるいはすべてが正でない整数 $\{k_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ により $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ と書ける.

集合 Δ の元は**単純ルート**と呼ばれ, 当然 $\sharp\Delta = \dim E$ である.

ルート系 Φ が**既約**であるとは, Φ が 2 つの「直交する」部分集合 $\Phi_1,\ \Phi_2$ の和集合にならないことである. ここで Φ_1 と Φ_2 が直交するとは以下が成り立つことである.

$$\alpha \in \Phi_i \Rightarrow (\alpha, \beta) = 0\ \forall \beta \in \Phi_j \quad (i \neq j,\ i, j \in \{1, 2\}).$$

一般にルート系は既約なルート系の直交和で書けることが知られている. つまりルート系 Φ は, 有限個の既約で互いに直交するルート系 $\Phi_1,\ \Phi_2, \cdots, \Phi_m$ により

$$\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2 \sqcup \cdots \sqcup \Phi_m.$$

と書ける.

2.3 Dynkin 図形の説明 ([Hu, Chap.III. Section 11] 参照)

ルート系 Φ と単純ルートの集合 Δ が与えられたとき, Dynkin 図形は以下の要領で記述される.

- $\sharp\Delta$ 個の頂点を与える.
- 各頂点は一つの単純ルートに対応していると考える. 2 つの単純ルート $\alpha_1,\ \alpha_2$ に対応する頂点は $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \times \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle$ 本の線で結ぶ.
- 線で結ばれている 2 つの頂点の対応するルートが, 内積 $(*, *)$ に関する長さが同じでないとき, 線に短い方を向いた矢印を付ける.

既約なルート系に対する Dynkin 図形について以下の定理が成り立つ.

定理 2.2. 既約なルート系の *Dynkin* 図形は以下の 9 個の系列に分類される.

$$A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n,\ E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2$$

４つの系列 $A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n$ は古典型, 残りの 5 つの $E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2$ は例外型と呼ばれる.

ここで複素半単純 Lie 環の Dynkin 図形に話を及ぼす. $\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 環とする. Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数, つまり $\mathfrak{g}$ の極大可環部分代数を $\mathfrak{h}$ とし $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$($\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{h}$ の双対空間) を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する固有空間分解に現れる $\mathfrak{h}^*$ の元全体とする. 集合 Φ で張られる実ベクトル空間 $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式で誘導される内積を持つ. すると前節の抽象的なルート系の説明で $E = \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ とした状況の下, Φ はルート系の公理を満たす.

定理 2.3. 複素半単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ が既約, つまり単純 *Lie* 環であるための必要十分条件は, 対応するルート系 Φ が既約になることである. *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ の単純 *Lie* 環への直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ に対応してルート系 Φ は既約なルート系の和集合 $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2 \sqcup \cdots \sqcup \Phi_m$ として書ける. ここに $1 \leq i \leq m$ に対し Φ_i は *Lie* 環 $\mathfrak{g}_i$ のルート系である.

よって複素半単純 Lie 環の分類は複素単純 Lie 環の分類に帰着されそれは Dynkin 図形により分類できることが分かった. Accidental 同型は古典型 Lie 群の場合を考えれば十分である. 次節では古典型複素単純 Lie 環ないしは Lie 群を Dynkin 図形とともに分類を与える.

2.4 Dynkin 図形の記述

ここでは複素単純 Lie 環ないしは Lie 群に対する, Dynkin 図形を与える. 各々の系列に対して実形式も与えるが、実形式の具体的な記述は次節で与える. 以下において括弧の中は Lie 環を表す.

1. A_n-型：$SL(n,\mathbb{C})$ ($\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$)

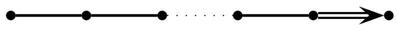
   Dynkin 図形：

   実形式：

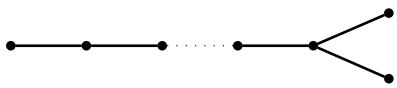
   A-I 型:$SL(l,\mathbb{R})$ ($\mathfrak{sl}(l,\mathbb{R})$), A-II 型:$SL(m,\mathbb{H})$ ($\mathfrak{sl}(m,\mathbb{H})$), $A{-}III$ 型:$SU(p,q)$ ($\mathfrak{su}(p,q)$).

2. B_n-型と D_n-型：$SO(2n+1,\mathbb{C}),\ SO(2n,\mathbb{C})$ $(\mathfrak{so}(m,\mathbb{C}))$

Dynkin 図形, B 型：



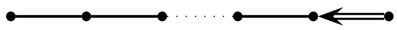
Dynkin 図形, D 型：



実形式：BD-I 又は BD-II 型：$SO(p,q)$ $(\mathfrak{so}(p,q))$, D-III 型：$SO^*(2n)$ $(\mathfrak{so}^*(2n))$.

3. C_n-型 ($\mathfrak{c}_n$-型)：$Sp(n,\mathbb{C})$ $(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}))$

Dynkin 図形：



実形式：C-I 型：$Sp(n,\mathbb{R})$ $(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}))$, C-II 型：$Sp(p,q)$ $(\mathfrak{sp}(p,q))$.

2.5　実形式のリスト

Lie 群：

$$SL(l,\mathbb{R}) := \{g \in M(l,\mathbb{R}) \mid \det(g)=1\},\ SL(m,\mathbb{H}) := \{g \in M(m,\mathbb{H}) \mid N_{\mathbb{H}}^m(g)=1\},$$

$$SU(p,q) := \{g \in SL(p+q,\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{g}\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix}\},$$

$$SU^*(2n) := \{\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in SL(2n,\mathbb{C}) \mid z_1,\ z_2 \in M(n,\mathbb{C})\}(\simeq SL(n,\mathbb{H})),$$

$$SO(p,q) := \{g \in SL(p+q,\mathbb{R}) \mid {}^tg\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix}\},$$

$$SO^*(2n) := \{g \in SU(n,n) \mid {}^tg\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}\},$$

$$Sp(n,\mathbb{R}) := \{g \in SL(2n,\mathbb{R}) \mid {}^tg\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}\},$$

$$Sp(p,q) := \{g \in M(p+q,\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{g}\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix}\}.$$

但し $Sp(p,0)=Sp(0,p)$ は $Sp(p)$ と記す.

Lie 環：

$$\mathfrak{sl}(l,\mathbb{R}) := \{X \in M(l,\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(X)=0\},\ \mathfrak{sl}(m,\mathbb{H}) := \{X \in M(m,\mathbb{H}) \mid \tau_{\mathbb{H}}^{m}(X)=0\},$$

$$\mathfrak{su}(p,q) := \{X \in \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{X}\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} X = 0_{p+q}\},$$

$$\mathfrak{su}^*(2n) := \{\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}) \mid z_1,\ z_2 \in M(n,\mathbb{C})\}(\simeq \mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})),$$

$$\mathfrak{so}(p,q) := \{X \in \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R}) \mid {}^tX\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} X = 0_{p+q}\},$$

$$\mathfrak{so}^*(2n) := \{X \in \mathfrak{su}(n,n) \mid {}^tX\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix} X = 0_{2n}\},$$

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R}) \mid {}^tX\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} X = 0_{2n}\},$$

$$\mathfrak{sp}(p,q) := \{X \in M(p+q,\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{X}\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} X = 0_{p+q}\}.$$

但し $\mathfrak{sp}(p,0)=\mathfrak{sp}(0,p)$ は $\mathfrak{sp}(p)$ と記す.

2.6 Vogan 図形

(1) Vogan 図形の説明 ([Kn, Chap.VI, Section 8] 参照)

$\mathfrak{g}_0$ を実半単純 Lie 環とする. θ を $\mathfrak{g}_0$ の Cartan 対合とする. つまり θ は $\mathfrak{g}_0$ 上の位数 2 の自己同型で $\mathfrak{k}_0 := \{X \in \mathfrak{g}_0 \mid \theta(X) = X\}$ とするとこれは $\mathfrak{g}_0$ に対応する半単純 Lie 群の極大コンパクト群の Lie 環となる. この θ による $\mathfrak{g}_0$ の固有空間分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ ($\mathfrak{p}_0 := \{X \in \mathfrak{g}_0 \mid \theta(X) = -X\}$) は Cartan 分解と呼ばれる.

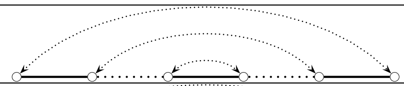
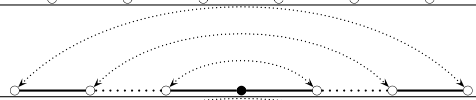
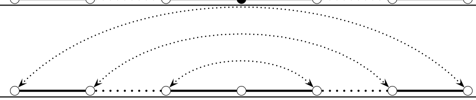
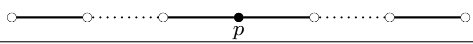
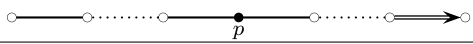
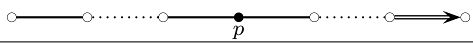
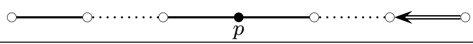
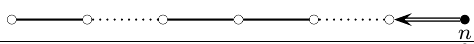
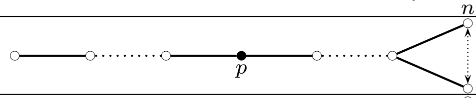
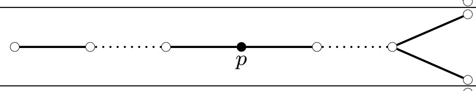
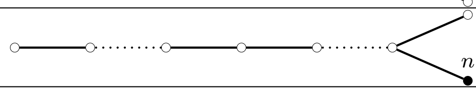
Vogan 図形を導入するためには極大コンパクト次元最大の θ 安定な Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_0$, つまり $\mathfrak{h}_0$ の $\mathfrak{k}_0$ との共通集合 $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ の次元が最大となる θ 安定な Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_0$ が必要である. すると $\mathfrak{g}_0$ の Vogan 図形は, その複素化 $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ の Dynkin 図形に以下の付加情報を与えたものとして定義される.

- 各頂点は対応するルートが非コンパクト (つまり $\mathfrak{h}_{0,\mathbb{C}}$ に関する $\mathfrak{p}_{0,\mathbb{C}}$ のルート空間分解に生じる) のときは黒丸とし, コンパクト (つまり $\mathfrak{h}_{0,\mathbb{C}}$ に関する $\mathfrak{k}_{0,\mathbb{C}}$ のルート空間分解に生じる) のときは白丸とする.

- 2つのルートが θ で共役のときは, 対応する頂点を両方向矢印で結ぶ.

注意 2.4. 実形式の分類を記述する図式として佐武図形も有名である ([Sat, §3, 3.4] 参照). Vogan 図形の場合と違い, 極大分裂トーラスを含む Cartan 部分代数に関するルート系を考えることにより与えられる.

(2) Vogan 図形の記述 ([Kn, Appendix C, Section 3] 参照)

Dynkin 図形	Lie 代数	Vogan 図形
A_{2n}	$\mathfrak{sl}(2n+1,\mathbb{R})$	
A_{2n-1}	$\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})$	
A_{2n-1}	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$ $(n \geq 2)$	
A_{p+q-1}	$\mathfrak{su}(p,q)$ $(1 \leq p \leq q)$	
B_{p+q}	$\mathfrak{so}(2p,2q+1)$ $(1 \leq p \leq q)$	
B_{p+q}	$\mathfrak{so}(2p,2q+1)$ $(p > q \geq 0)$	
C_{p+q}	$\mathfrak{sp}(p,q)$ $(1 \leq p \leq q)$	
C_n	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$	
D_{p+q+1}	$\mathfrak{so}(2p+1,2q+1)$ $(0 \leq p \leq q)$	
D_{p+q}	$\mathfrak{so}(2p,2q)$ $(1 \leq p \leq q)$	
D_n	$\mathfrak{so}^*(2n)$ $(n \geq 3)$	

注意：

- コンパクトな Lie 環 $\mathfrak{su}(q)$ (A_{q-1}), $\mathfrak{so}(2q+1)$ (B_q), $\mathfrak{sp}(q)$ (C_q) $\mathfrak{so}(2q)$ (D_q) に対しては黒丸なし.

- B_{p+q} には2種類書いた. Vogan 図形は同じであるが, Cayley 変換のリストが違う.

- $\mathfrak{so}(2p+1,2q+1)$ $(0 \leq p \leq q)$ について, $\mathfrak{so}(1,1)$, $\mathfrak{so}(1,3)$ は除き, $p=0$ のときは黒丸なし.

- $\mathfrak{so}(2p,2q)$ $(1 \leq p \leq q)$ では $\mathfrak{so}(2,2)$ を除く.

3　低次元 Lie 環の同型 (Accidental 同型)

この節では, 最初に Helgason[He] を参考に低次元 Lie 環の同型の表を与える. 低次元 Lie 環について, Dynkin 図形の型は違っても同型ということがあり得る. 本稿ではこのような状況を「**Accidental 同型**」と呼ぶことにする. 次に前節で与えた Vogan 図形を使って $B_2 = C_2$ の場合を例に取り Lie 環の Accidental 同型を確かめる. 他の場合も同様に確かめられる.

3.1　同型の表 (参考：[He, Chap.X, Section 6, 4])

$A_1 = B_1 = C_1$ の実形式：

1. $\mathfrak{s}u(2) \simeq \mathfrak{s}o(3) \simeq \mathfrak{s}p(1)$.
2. $\mathfrak{s}l(2, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{s}u(1,1) \simeq \mathfrak{s}o(2,1) \simeq \mathfrak{s}p(1, \mathbb{R})$.

$B_2 = C_2$ の実形式：

1. $\mathfrak{s}o(5) \simeq \mathfrak{s}p(2)$.
2. $\mathfrak{s}o(3,2) \simeq \mathfrak{s}p(2, \mathbb{R})$.
3. $\mathfrak{s}o(4,1) \simeq \mathfrak{s}p(1,1)$.

$A_3 = D_3$ の実形式：

1. $\mathfrak{s}u(4) \simeq \mathfrak{s}o(6)$.
2. $\mathfrak{s}l(4, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{s}o(3,3)$.
3. $\mathfrak{s}u^*(4) \simeq \mathfrak{s}l(2, \mathbb{H}) \simeq \mathfrak{s}o(5,1)$.
4. $\mathfrak{s}u(2,2) \simeq \mathfrak{s}o(4,2)$.
5. $\mathfrak{s}u(3,1) \simeq \mathfrak{s}o^*(6)$.

$D_2 = A_1 \times A_1$ の実形式：

1. $\mathfrak{s}o(4) \simeq \mathfrak{s}o(3) \times \mathfrak{s}o(3) \simeq \mathfrak{s}u(2) \times \mathfrak{s}u(2) \simeq \mathfrak{s}p(1) \times \mathfrak{s}p(1)$.
2. $\mathfrak{s}o(3,1) \simeq \mathfrak{s}l(2, \mathbb{C})$.

3. $\mathfrak{s}o(2,2) \simeq \mathfrak{s}l(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{s}l(2,\mathbb{R})$.

4. $\mathfrak{s}o^*(4) \simeq \mathfrak{s}u(2) \times \mathfrak{s}l(2,\mathbb{R})$.

その他：

1. $\mathfrak{s}o^*(8) \simeq \mathfrak{s}o(6,2)$.

3.2 Vogan による Accidental 同型の確認 ($B_2 = C_2$ の場合)

ここでは Accidental 同型の中でも $B_2 = C_2$ の場合を取り上げて考えてみる．この場合は以下の 3 つの同型がある．

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}o(5) &\simeq \mathfrak{s}p(2), \\ \mathfrak{s}o(3,2) &\simeq \mathfrak{s}p(2,\mathbb{R}), \\ \mathfrak{s}o(4,1) &\simeq \mathfrak{s}p(1,1). \end{aligned}$$

C_2 型の 3 つの Lie 環の Vogan 図形は以下の通りである．

$\mathfrak{sp}(2)$ $\quad \circ\!\Longleftarrow\!\circ$

$\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$ $\quad \circ\!\Longleftarrow\!\bullet$

$\mathfrak{sp}(1,1)$ $\quad \bullet\!\Longleftarrow\!\circ$

また B_2 型の 3 つの Lie 環の Vogan 図形は以下で与えられる．

$\mathfrak{so}(5)$ $\quad \circ\!\Longrightarrow\!\circ$

$\mathfrak{so}(2,3)$ $\quad \bullet\!\Longrightarrow\!\circ$

$\mathfrak{so}(4,1)$ $\quad \circ\!\Longrightarrow\!\bullet$

以上を比較すると C_2 場合は B_2 の場合の矢印の向きを変えただけである．つまり $B_2 = C_2$ の場合の Accidental 同型を Vogan 図形で確認できた．その他の場合も同様に確かめられる．

4 低次元 Lie 群の Accidental 同型

この節では最初に, 第 3 節で与えた Lie 環のレベルの Accidental 同型の分類に対応して, Lie 群のレベルでの Accidental 同型の表を与える (その他の更なる例も与える)．次にその証明について説明する．この節は [Yk, 第１０節] を参考にした．以下では Lie 群 G に対し, G_0 は G の単位元の連結成分を表す．

4.1　低次元 Lie 群の同型 (Accidental 同型) の表

$A_1 = B_1 = C_1$ の実形式：

1. $SU(2) \simeq Sp(1) \simeq Spin(3),\ Sp(1)/\{\pm 1\} \simeq SO(3)$.
2. $SU(1,1) \simeq SL(2,\mathbb{R})$.
3. $SL(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(2,1)$.

$B_2 = C_2$ の実形式：

1. $Sp(2) \simeq Spin(5),\ Sp(2)/\{\pm 1\} \simeq SO(5)$.
2. $Sp(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(2,3)$.
3. $Sp(1,1)/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(4,1)$.

$A_3 = D_3$ の実形式：

1. $SU(4)/\{\pm 1_4\} \simeq SO(6)$.
2. $SL(4,\mathbb{R})/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(3,3)$.
3. $SU^*(4) \simeq SL(2,\mathbb{H}),\ SL(2,\mathbb{H})/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(5,1)$.
4. $SU(2,2)/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(4,2)$.
5. $SU(3,1)/\{\pm 1_4\} \simeq SO^*(6)$.

$D_2 = A_1 \times A_1$ の実形式：

1. $SO(4) \simeq (Sp(1) \times Sp(1))/\{\pm(1,1)\}$.
2. $SO_0(3,1) \simeq SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1_2\}$.
3. $SO_0(2,2) \simeq (SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1_2,1_2)\}$.
4. $SO^*(4) \simeq (Sp(1) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1,1_2)\}$.

その他 I (上以外)：

1. $SO^*(8)/\{\pm 1\} \simeq SO_0(6,2)/\{\pm 1_8\}$.

その他 II (複素 Lie 群どうしの場合)

1. $SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1_2\} \simeq SO(3,\mathbb{C})$.
2. $(SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C}))/\{\pm(1_2, 1_2)\} \simeq SO(4,\mathbb{C})$.
3. $Sp(2,\mathbb{C})/\{\pm 1_4\} \simeq SO(5,\mathbb{C})$.
4. $SL(4,\mathbb{C})/\{\pm 1_4\} \simeq SO(6,\mathbb{C})$.

その他 III (similitude 因子付きの場合)

1. $PGL(2,\mathbb{R})(:= GL(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(2,1)$.
2. $PGSp(2,\mathbb{R})(:= GSp(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(2,3)$.
3. $PGSp(1,1)(:= GSp(1,1)/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(4,1)$.
4. $PGL(2,\mathbb{H})(:= GL(2,\mathbb{H})/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(5,1)$.
5. $(GL(4,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times)/\{(z, z^{-2}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO(3,3)$.
6. $(GL(2,\mathbb{H}) \times \mathbb{R}^\times)/\{(z, z^{-2}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO(5,1)$.
7. $(GSp(1) \times GSp(1))/\{(z, z^{-1}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO(4)$.
8. $(GSp(1) \times GL(2,\mathbb{R}))/\{(z, z^{-1}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO^*(4)$.

$*$偶数次数mの非退化対称行列Qで定義されるsimilitude因子付き直交群$GO(Q)$, $GSO(Q)$は以下で実現できる.

$$\begin{aligned} GO(Q) &:= \{g \in GL(m,\mathbb{R}) \mid {}^t gQg = \nu(g)Q,\ \nu(g) \in \mathbb{R}^\times\}, \\ GSO(Q) &:= \{g \in GO(Q) \mid \det(g) = \nu(g)^{\frac{m}{2}}\}. \end{aligned}$$

4.2 証明

この節ではまず, Accidental 同型の典型例である以下の命題を証明する. 他の多くの場合も同様に証明できる.

命題 4.1.

$$SL(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(2,1), \quad Sp(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(2,3)$$

命題を証明するにあたり, 次の補題が基本的である.

補題 4.2. *G と G' を線形 Lie 群とし, $f : G \to G'$ を連続準同型写像とする. 以下の 3 つの条件が成り立つとする.*
(i) G' は連結である.
(ii) $\mathrm{Ker}\, f$ は離散的である.
(iii) $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ をそれぞれ G, G' の Lie 環とすると $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}'$.
このとき, 位相群(もっと言えば C^∞-Lie 群)としての同型

$$G/\mathrm{Ker}\, f \simeq G'$$

が成立する.

証明 . まず f の微分 df が引き起こす Lie 環の準同型写像

$$df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$$

を考える. (ii) の条件から $\dim \mathrm{Ker}\, df = 0$ であることが分かり df は単射だが, (iii) より $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}'$ なので, df は同型写像である. G' の連結性から G' の任意の元は $\mathfrak{g}'$ の元の指数写像で書ける. よって f が全射であることが分かる. したがって位相群の準同型定理より $G/\mathrm{Ker}\, f \simeq G'$ が証明できる.

命題の証明 . (V, Q) で 2 次形式 Q 付き有限次元実ベクトル空間 V を表すとする. $O(V, Q) := \{g \in GL(V) \mid Q(gv) = Q(v),\ \forall v \in V\}$ を (V, Q) が定める直交群とする. 証明は次の 3 つのステップに分けて与えられる.

(1) (V, Q) の指定：

$$(V_1, Q_1) := (\{X \in M(2, \mathbb{R}) \mid {}^t X = X\}, \det),$$
$$(V_2, Q_2) := (\{T \in M(4, \mathbb{R}) \mid T \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix} \text{が歪対称},\ \mathrm{Tr}\, T = 0\}, \mathrm{Tr})$$

とする. ここに Tr は以下により V_2 上の 2 次形式と見ている.

$$V_2 \ni X \mapsto \mathrm{Tr}(X^2)$$

このとき

$$O(V_1, Q_1) \simeq O(2, 1), \quad O(V_2, Q_2) \simeq O(2, 3)$$

となる.

(2) $f : G \to O(V, Q)$ $(G = SL(2,\mathbb{R}),\ Sp(2,\mathbb{R}))$ の指定：

$G = SL(2,\mathbb{R}),\ Sp(2,\mathbb{R})$ に対して $f : G \to O(V_i, Q_i)$ $(i = 1, 2)$ を次のように指定する.

$$f(g)v := \begin{cases} gv{}^tg & (i = 1,\ g \in SL(2,\mathbb{R}),\ v \in V_1) \\ gvg^{-1} & (i = 2,\ g \in Sp(2,\mathbb{R}),\ v \in V_2) \end{cases}.$$

$SL(2,\mathbb{R}),\ Sp(2,\mathbb{R})$ は連結である. 実際, 線形 Lie 群の連結性は極大コンパクト部分群の連結性より従う ([Kn, p117], [Yk, p61] 参照) が　$SL(2,\mathbb{R})$ と $Sp(2,\mathbb{R})$ の極大コンパクト群 $SO(2)$ と $Sp(2,\mathbb{R}) \cap O(4) \simeq U(2)$ は連結である. よって f の像も連結である.

(3) 補題 4.2 の適用：

$\mathrm{Ker}\, f = \{\pm 1\}$ であることが直接計算で確かめられる. 前節で与えた Lie 環の同型

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(2,1),\ \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(2,3)$$

を考慮すると補題 4.2 が適用できることが分かり, 求める Lie 群の同型が示される.

4.3　他の場合

その他同様に証明できる場合のいくつかについて, (V, Q) の指定の仕方と, 準同型 f の定義のみを示す. 以下に現れる記号については 2.1 節を参照されたい.

- $Sp(1)/\{\pm 1\} \simeq SO(3)$:
  (1) (V, Q) の指定:
  $$V := \{x \in \mathbb{H} \mid x + \bar{x} = 0\},\ Q := N_{\mathbb{H}}.$$
  (2) f の定義:
  $$f(g)v := gv\bar{g} \quad (g \in Sp(1),\ v \in V).$$
- $Sp(2)/\{\pm 1\} \simeq SO(5)$:
  (1) (V, Q) の指定:
  $$V := \{\begin{pmatrix} \xi & x \\ \bar{x} & -\xi \end{pmatrix} \mid \xi \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{H}\},\ Q := -N_{\mathbb{H}}^2.$$
  (2) f の定義:
  $$f(g)v := gv{}^t\bar{g} \quad (g \in Sp(2),\ v \in V).$$

- $Sp(1,1)/\{\pm 1\} \simeq SO_0(4,1)$:
  (1) (V,Q) の指定:
$$V := \{X \in M_2(\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{X} = IXI,\ \tau_{\mathbb{H}}^2(X) = 0\},\ Q := -N_{\mathbb{H}}^2.$$
  ここに $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と定義する.
  (2) f の定義:
$$f(g)v := g^{-1}vg \quad (g \in Sp(1,1),\ v \in V).$$
- $SU(4)/\{\pm 1_4\} \simeq SO(6)$:
  (1) (V,Q) の指定:
$$V := \{\begin{pmatrix} X & Y \\ -{}^tY & -\bar{X} \end{pmatrix} \mid X = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} -b & a \\ -\bar{a} & -\bar{b} \end{pmatrix},\ a,\ b,\ \xi \in \mathbb{C}\},\ Q := N.$$
  ここに $v \in V$ に対し, $N(v) := \dfrac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(v{}^t\bar{v})$ と定義する.
  (2) f の定義:
$$f(g)v := gv{}^tg \quad (g \in SU(4),\ v \in V).$$
- $SU(2,2)/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(4,2)$:
  (1) (V,Q) の指定:
$$V := \{\begin{pmatrix} X & Y \\ -{}^tY & -{}^t\bar{X} \end{pmatrix} \mid X = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} -b & a \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix},\ a,\ b,\ \xi \in \mathbb{C}\},\ Q := N.$$
  ここに $v \in V$ に対し, $N(v) := -\dfrac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(I_2vI_2{}^t\bar{v})$ ($I_2 := \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2 \end{pmatrix}$) と定義する.
  (2) f の定義:
$$f(g)v = gv{}^tg \quad (g \in SU(2,2),\ v \in V).$$
- $SL(4,\mathbb{R})/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(3,3)$:
  この場合については分裂複素数 $\mathbb{C}'$ を用意し, 同型 $SL(4,\mathbb{R}) \simeq SU(4,\mathbb{C}')$($\mathbb{C}'$ 係数の行列サイズ 4 の定符号ユニタリー群) により, $SL(4,\mathbb{R})$ を $SU(4,\mathbb{C}')$ に置き換えて

考える.
(1) (V,Q) の指定:

$$V := \{\begin{pmatrix} X & Y \\ -{}^tY & -{}^t\bar{X} \end{pmatrix} \mid X = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} -b & a \\ -\bar{a} & -\bar{b} \end{pmatrix},\ a,\ b,\ \xi \in \mathbb{C}'\},\ Q := N.$$

ここに $v \in V$ に対し $N(v) := \dfrac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(v{}^t\bar{v})$ と定義する.
(2) f の定義:

$$f(g)v = gv{}^tg \quad (g \in SU(4,,\mathbb{C}') \simeq SL(4,\mathbb{R}),\ v \in V).$$

- $(Sp(1) \times Sp(1))/\{\pm(1,1)\} \simeq SO(4)$:
  (1) (V,Q) の指定:
  $$V := \mathbb{H},\ Q := N_{\mathbb{H}}.$$
  (2) f の定義:
  $$f((g_1,g_2))v := g_1 v \bar{g}_2 \quad ((g_1,g_2) \in Sp(1) \times Sp(1),\ v \in V).$$
- $SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(3,1)$:
  (1) (V,Q) の指定:
  $$V := \{X \in M(2,\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{X} = X\},\ Q := \det.$$
  (2) f の定義:
  $$f(g)v = gX{}^t\bar{g} \quad (g \in SL(2,\mathbb{C}),\ v \in V).$$
- $(SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1_2,1_2)\} \simeq SO_0(2,2)$:
  (1) (V,Q) の指定:
  $$V := M(2,\mathbb{R}),\ Q = \det.$$
  (2) f の定義:
  $$f((g_1,g_2))v := g_1 v{}^tg \quad ((g_1,g_2) \in SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}),\ v \in V).$$
- $(Sp(1) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1,1_2)\} \simeq SO^*(4)$:
  $\mathbb{H}'$ を $\mathbb{R}$ 上の不定符号四元数環とし $\mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ をその複素化とする. このとき $Sp(1)$ は

$\{x \in \mathbb{H} \mid N_{\mathbb{H}}(x) = 1\}$ と同一視し, $SL(2,\mathbb{R})$ は $Sp(1, N_{\mathbb{H}'}) := \{x \in \mathbb{H}' \mid N_{\mathbb{H}'}(x) = 1\}$ と同一視して考える. そして $SO^*(4)$ は以下の同型な群に置き換えて与える.

$$\{X \in SL(4,\mathbb{C}) \mid \begin{pmatrix} J & 0_2 \\ 0_2 & J \end{pmatrix} X = \bar{X} \begin{pmatrix} J & 0_2 \\ 0_2 & J \end{pmatrix},\ {}^tXX = 1_4\}. \quad (J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$$

(1) (V, Q) の指定:

$$V = \mathbb{H}'_{\mathbb{C}},\ Q = N_{\mathbb{H}',\mathbb{C}}.$$

ここに $N_{\mathbb{H}',\mathbb{C}}$ は $N_{\mathbb{H}'}$ が定める $\mathbb{H}'$ 上の実 2 次形式を, $\mathbb{C}$ 係数に伸ばして $\mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ 上の複素 2 次形式と見なしたものである.

(2) f の定義:

$$f((g_1, g_2))v := g_1 v \bar{g}_2 \quad ((g_1, g_2) \in Sp(1) \times Sp(1, \mathbb{H}'),\ v \in V).$$

ここに定符号四元数環 $\mathbb{H}$ を $\mathbb{H}'_{\mathbb{C}}(\simeq M(2,\mathbb{C}))$ の部分環と見なした上で, $g_1 \in \{x \in \mathbb{H} \mid N(x) = 1\} = Sp(1)$ を $v \in \mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ に左から掛けている.

4.4 注意

- $SO^*(8)/\{\pm 1_8\} \simeq SO_0(6,2)/\{\pm 1_8\}$ について:
  これは例えば [F-H, Section 3] で証明が与えられている. $SO^*(4n)$ は次の群と同型である.

$$\{g \in M_{2n}(\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{g} \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}\}.$$

  これは $n \geq 3$ のとき次数 n の四元数上半空間の双正則自己同型群である. [F-H] では $SO^*(8)/\{\pm 1_8\}$ が, 次数 2 の四元数上半空間の双正則自己同型群における指数 2 の部分群とみなせること ([Kr, Theorem 1.8] 参照) に注目して上の同型を証明している.

- 複素 Lie 群どうしの場合の Accidental 同型については証明を与えなかったが, 4.2 節で与えた議論と同様に証明できる ([Yk, 10 節] 参照). 3.1 節の表に書いている Dynkin 図形の一致は複素 Lie 環の Accidental 同型を示している.

- similitude 因子付きの場合は証明なしで与えたが, 基本的には上の写像 f を修正することで与えられる. この場合は Lie 群が連結ではない場合がしばしばなので注意が必要である. similitude 群を考える利点として, 例えば Hecke 作用素の保型形式への作用を考えるとき, 半単純群ではなく similitude 群にして考える方がよい場合が多々ある.

- Clifford 代数を使った証明が [E-G-M] で与えられている．この論文では “Vahlen 群” という Clifford 代数係数の 2 次正方行列の中に実現される Lie 群を考え, それが Spin 群と同型であることを示している．Clifford 代数の次元が低い場合で Vahlen 群が様々な古典群と同型であることが示されており ([E-G-M, Section 6] 参照), それは上に挙げた直交群が関わる Accidental 同型をカバーしている．例えば 4.2, 4.3 節で触れなかった $SL(2,\mathbb{H})/\{\pm 1\} \simeq SO_0(5,1)$, $SU(3,1)/\{\pm 1_4\} \simeq SO^*(6)$ に相当することも扱っている．

- 保型形式をアデール群上で考えたい人にとっては, 代数群のレベルでの Accidental 同型を知りたいであろう．この報告書では詳しく取り上げないが, 代表的なものをここに列挙する．

  (i) $E^\times \simeq GSO(E, N_{E/F})$ (E/F : 2 次拡大体, $N_{E/F}$: ノルム形式).
  (ii) $(B^\times \times B^\times/\{(z, z^{-1}) \mid z \in GL(1)\} \simeq GSO(B, N_B)$ (B : 総実体上の定符号四元数環, N_B : ノルム形式).
  (iii) $PGL(2) \simeq SO(2,1)$.
  (iv) $PGSp(2) \simeq SO(2,3)$.
  (v) $PGSp(1,1) \simeq SO(4,1)$.
  (vi) $PGL(2,B) \simeq SO(5,1)$ (B : 総実体上の定符号四元数環).
  (vii) $(GL(4) \times GL(1))/\{(z, z^{-2}) \mid z \in GL(1)\} \simeq GSO(3,3)$.
  (viii) $(GL(2,B) \times GL(1))/\{(z, z^{-2}) \mid z \in GL(1)\} \simeq GSO(5,1)$.
  (iv) $(GL(2) \times GL(2))/\{(z, z^{-1}) \mid z \in GL(1)\} \simeq GSO(2,2)$.
  (x) $(B^\times \times GL(2))/\{(z, z^{-1}) \mid z \in GL(1)\} \simeq GSO^*(4)$.

5 低次元 Lie 群上の保型形式のリフティング

実シンプレクティック群の中の簡約実 Lie 群の (既約な)dual pair は以下の 4 つに分類されることが知られている．

$$GL(m,D) \times GL(m',D), \quad Sp(m,\mathbb{R}) \times O(p,q), \quad U(m,n) \times U(m',n'), \quad Sp(p,q) \times O^*(2n).$$

ここに D は実数体上の斜体を表す．つまり実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$ または Hamilton の四元数環 $\mathbb{H}$ である． よく知られた保型形式のリフティングに「テータリフト (またはテータ対応)」([Mat] 参照) が関わっているものが少なくないが, これは上述の dual pair に対して考えられるものである．導入でも述べたように低次元 Lie 群上の保型形式が関わるリフティングについてテータリフトが関係する場合, Accidental 同型を使ってどの dual pair に対するテータリフトなのかを理解する必要がしばしばある．この節では,

まず低次元 Lie 群の保型形式のリフティングでテータリフトが関わるものを, 関係する dual pair 毎に分けて概説する. 多くの場合楕円保型形式が関わっているが, そのために $SL(2,\mathbb{R}) = Sp(1,\mathbb{R})$ であることを注意しておく. 次に, 説明した各リフトについてその重さの対応と関連するテータ対応による解釈を表にしたのもを与える.

5.1 低次元 Lie 群上の保型形式のリフティング概説

(1) $SL(2,\mathbb{R}) \times O(2,1)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$SL(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(2,1)(= O_0(2,1))$.
- リフティング：重さ半整数の楕円保型形式から重さ整数の楕円保型形式 (志村 [Shim], 丹羽 [Ni]), 重さ整数の楕円保型形式から重さ半整数の楕円保型形式 (新谷 [Shin-1]).
- コメント：重さ半整数楕円保型形式の Hecke 理論を確立するとともに, その後「志村対応」と呼ばれることになる, 重さ半整数から重さ整数楕円保型形式への Hecke 作用素と可換な対応の存在を指摘した最初の論文が志村 [Shim] である. その後新谷 [Shin-1] による重さ整数から重さ半整数楕円保型形式へのリフトの Weil 表現を使った定式化が与えられ, 丹羽 [Ni] によって志村対応の Weil 表現を用いた再定式化が与えられている. その後 Maass 形式の場合への拡張がいくつか与えられる ([K-S], [Ko] など). 保型表現の文脈で最も一般的な理論を与えたのが Waldspurger[W] である. 志村対応については坂田氏の解説 [Sak] も参照されたい.

(2) $SL(2,\mathbb{R}) \times O(2,3)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$Sp(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(2,3)(= O_0(2,3))$.
- リフティング：重さ半整数楕円保型形式から次数 2 の正則ジーゲルカスプ形式 (黒川 [Kur], Andrianov[An], Maass[Ma], Zagier[Za-1]).
- いわゆる「斉藤-黒川リフト」である. 楕円カスプ形式で成り立つ Ramanujan-Petersson 予想の反例をジーゲル保型形式の場合で見つけ, 楕円保型形式からのリフティングの存在を予想した論文が黒川 [Kur] である. その証明は Maass[Maa], Zagier[Za-1] よって与えられた. もともとの斉藤-黒川リフトはレベル 1 の正則ジーゲル保型形式へのリフトである. レベル付きの斉藤-黒川リフトについては伊吹山 [Ib] を参照されたい. 保型表現による定式化については Piatetski-Shapiro[Ps] などを参照してください.

(3) $Sp(2,\mathbb{R})\times O(4)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$(Sp(1)\times Sp(1))/\{\pm(1,1)\}\simeq SO(4)$
- リフティング：四元数環の乗法群上の 2 つの保型形式の組から次数 2 の正則ジーゲル保型形式 (吉田 [Ys]).
- いわゆる「吉田リフト」ある．Abel 曲面の Hasse-Weil L-関数と同じ L-関数を持つジーゲル保型形式の例をこの吉田リフトで与えることができる．これについては [Ok] なども参照されたい． 吉田リフトの非消滅の詳しい研究について [B-S] がある．

(4) $SL(2,\mathbb{R})\times O(2,2)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$(SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1_2,1_2)\}\simeq SO_0(2,2)$
- リフティング：楕円保型形式から次数 2 の総実代数体上の Hilbert 保型形式 (土井-長沼 [D-N]).
- 有限次代数体の Dedekind ゼータ関数が下の代数体のゼータ関数ないしは L 関数の積に分解するという事実が保型 L 関数でも成り立つであろうという期待から生じたのが, いわゆる「ベースチェンジリフト (Base change lift)」である ([La], [Sat], [Shin-2] など). [D-N] は次数 2 の総実代数体という特別な場合を扱っているが, これが上の Accidental 同型に気をつけるとテータリフトとして定式化できることが分る ([Kud-1]). 関連する文献としてリフティングを与える積分核を分かりやすい形で与え, それに関する “Zagier identity” をつかって土井-長沼リフトを再定式化した [Za-1] も挙げておく.

(5) $SL(2,\mathbb{R})\times O(3,1)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1_2\}\simeq SO_0(3,1)(=O_0(3,1))$
- リフティング：楕円保型形式から 3 次元双曲空間 (または $SL(2,\mathbb{C})$) 上の実解析的保型形式 (浅井 [As])
- 土井-長沼リフトの虚 2 次体版で, ここでは「浅井リフト」と呼ぶ. 3 次元双曲空間は複素解析的でなく, その上には正則保型形式は存在しない. 関連する論文としては [Fr] などがある.

(6) $U(1,1)\times U(1,q)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$SU(1,1)\simeq SL(2,\mathbb{R})$
- リフティング：楕円保型形式から複素超球 (または $SU(1,q)$) 上の正則保型形式へのリフト (Kudla [Kud-2]).
- 「Kudla リフト」と呼ばれる．このリフトの詳しい研究は $q=2$ の場合で, [Kud-3], [M-S] などがある.

(7) $O^*(4)\times Sp(1,q)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$SO^*(4)\simeq (Sp(1)\times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1,1_2)\}$
- リフティング：楕円保型形式と定符号四元数環の乗法群上の保型形式の組から $Sp(1,q)$ 上の非正則保型形式へのリフト.
- 荒川恒男氏が, 未発表のノートの中で, Kudla リフトの四元数ユニタリー群 $Sp(1,q)$ の場合に対する類似として当初は楕円保型形式からのリフティングという定式化で与えられたが, 楕円保型形式と定符号四元数環の乗法群上の保型形式との組からのテータリフトとして考えると自然である．荒川氏のテータリフトは無限素点で四元数離散系列表現を生成するという表現論的特徴付けを持ち ([Na]), 非正則でありながら正則保型形式と振舞いが似ている.

(8) その他注意：

- 菅野氏の報告書で取り上げられた「織田リフト」([Od], [Su]) は, 上述の (1), (2), (4) のリフトをカバーするものである．これは単にこれら 3 つのリフティングの拡張というだけでなく, 持ち上げられる楕円保型形式のフーリエ係数の観点からリフティングのフーリエ係数を書く公式, そして土井-長沼リフトの研究で与えられた Zagier identity ([Za-1] 参照) の IV 型対称領域への拡張などリフティングの詳しい研究も与えている.
- 最近の Gan-Takeda[G-Tk] と Gan-Tantono[G-Tn] による次数 2 の similitude 因子付きシンプレクティック群 ([G-Tk], [G-Tn] では $GSp(4)$ と記している) とその内部形式に対する非アルキメデス局所体上の局所 Langlands 対応の結果は, 低次元の一般線形群と古典群との Accidental 同型 (4.4 節 注意参照) 及びテータ対応を巧みに使って証明している．Accidental 同型のよい応用例として参照を勧める.

5.2　低次元 Lie 群上の保型形式のリフティングの表

以下では 5.1 節で概説したリフティングについての関連するテータ対応や保型形式の重さの対応について明示した表を与える．2 つの実 Lie 群 G_1 と G_2 について, “$G_1 \sim G_2$” は G_1 と G_2 が同種であることを意味し, “$G_1 \to G_2$” は G_1 の既約許容表現の同値類から G_2 のそれへのテータ対応という意味に解釈する．レベルの対応については各々の文献を参照されたい.

	保型形式のレベルでの対応	テータ対応による解釈
志村 (丹羽) 対応	$\mathcal{S}^{(1)}_{k+\frac{1}{2}} \to \mathcal{S}^{(1)}_{2k}$	$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})} \to O(2,1)(\sim SL(2,\mathbb{R}))$
新谷リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{2k} \to \mathcal{S}^{(1)}_{k+\frac{1}{2}}$	$O(2,1)(\sim SL(2,\mathbb{R})) \to \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$
斉藤-黒川リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{k+\frac{1}{2}} \to \mathcal{S}^{(2)}_{k+1}$	$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})} \to O(3,2)(\sim Sp(2,\mathbb{R}))$
土井-長沼リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{k} \to \mathcal{S}^{\mathrm{Hilb}}_{(k,k)}$	$SL(2,\mathbb{R}) \to O(2,2)(\sim SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))$
浅井リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{k} \to \mathcal{A}^{\frac{1}{2}(k^2-1)}_{2k+1}(SL(2,\mathbb{C}))$	$SL(2,\mathbb{R}) \to O(3,1)(\sim SL(2,\mathbb{C}))$
吉田リフト	$\mathcal{A}_{k_1}(B^\times) \times \mathcal{A}_{k_2}(B^\times) \to \mathcal{M}^{(2)}_{(l_1,l_2)}$	$O(4)(\sim \mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times \times \mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times) \to Sp(2,\mathbb{R})$
織田リフト (even)	$\mathcal{S}^{(1)}_{k-n+1} \to \mathcal{S}^{IV,2n}_{k}$	$SL(2,\mathbb{R}) \to O(2n,2)$
織田リフト (odd)	$\mathcal{S}^{(1)}_{k-n+1+\frac{1}{2}} \to \mathcal{S}^{IV,2n-1}_{k}$	$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})} \to O(2n-1,2)$
Kudla リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{\mu-\nu+1-q} \to M^{I,q}_{(\mu,\nu)}$	$SL(2,\mathbb{R}) \simeq SU(1,1) \to SU(1,q)$
荒川リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{k} \times \mathcal{A}_k(B^\times) \to \mathcal{S}^{\mathrm{QDS}}_{(0,k)}(Sp(1,q))$	$SO^*(4)(\simeq SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times) \to Sp(1,q)$

記号：

- $k,\ k_1,\ k_2,\ \mu$ は正の整数, ν は非負整数.
- $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$: $SL(2,\mathbb{R})$ の 2 重被覆群.
- $\mathcal{S}^{(1)}_{\kappa}$ ：重さ整数 κ の楕円カスプ形式の空間.
- $\mathcal{S}^{(1)}_{\kappa+\frac{1}{2}}$ ：重さ半整数 $\kappa+\frac{1}{2}$ の楕円カスプ形式の空間.
- $\mathcal{M}^{(2)}_{*}$ ：重さ $*$ の次数 2 の正則 Siegel 保型形式の空間 (吉田リフトにおいてはベクトル値の重さの場合 $(l_1,l_2)=(k_1+k_2+2, k_1-k_2+2)$, $k_1 \geq k_2$ を含む).
- $\mathcal{S}^{(2)}_{*}$ ：重さ $*$ の次数 2 の正則 Siegel カスプ形式の空間.
- $\mathcal{S}^{\mathrm{Hilb}}_{(\kappa,\kappa)}$ ：重さ (κ,κ) の (正則)Hilbert カスプ形式の空間.
- $\mathcal{A}^{\lambda}_{k}(SL(2,\mathbb{C}))$: 最高ウェイト k の $SU(2)$ の表現を重さに持ち, Casimir 作用素に関する固有値 λ の $SL(2,\mathbb{C})$ 上の保型形式の空間.

- $\mathcal{A}_k(B^\times)$: 最高ウェイト k の $SU(2) \simeq \{x \in \mathbb{H} \mid N_{\mathbb{H}}(x) = 1\}$ の既約表現を重さに持つ有理数体上の定符号四元数環の乗法群 $B^\times$ 上の保型形式の空間 (実際には B は総実体上で考えられるが, 簡単のためここでは有理数体を定義体とする).

- $M^{I,q}_{(\mu,\nu)}$: 重さ (μ, ν) の q 次元複素超球 (I 型領域) 上の正則カスプ形式の空間 (「重さ (μ, ν)」の意味は [Kud-2, Section 4] 参照. Kudla リフトにおいては $\mu - \nu > 2q + 1$).

- $\mathcal{S}^{IV,m}_k$: 重さ k の m 次元 IV 型対称領域上の正則カスプ形式の空間 (織田リフトにおいて $k > 2n + 2$(even の場合) または $k > 2n + 1$(odd の場合)).

- $\mathcal{S}^{\mathrm{QDS}}_{(0,k)}(Sp(1, q))$: 重さ $(0, k)$ の $Sp(1, q)$ の四元数離散系列表現を生成するカスプ形式の空間 (荒川リフトにおいて $k > 4q + 2$, $q = 1$ ならば $k > 4q = 4$ とできる).

参考文献

[An] A. N. Andrianov, Modular descent and the Saito-Kurokawa conjecture, Invent. Math. 53 (1979) 267-280.

[As] T. Asai, On the Doi-Naganuma lifting associated with imaginary quadratic fields, Nagoya Math. J. 71 (1978) 149-167.

[B-S] S. Böcherer and R. Schulze-Pillot, Siegel modular forms and theta series attached to quaternion algebras. Nagoya Math. J. 121 (1991) 35-96.

[D-N] K. Doi and H. Naganuma, On the functional equation of certain Dirichlet series, Invent. Math. 9 (1969/1970) 1-14.

[E-G-M] J. Elstrodt, F. Grunewald and J. Mennicke, Vahlen's Group of Clifford Matrices and Spin Groups, Math. Z. 196 (1987) 369-390.

[F-H] E. Freitag and C. F. Hermann, Some Modular Varieties of Low Dimension, Adv. Math. 152 (2000) 203-287.

[Fr] S. Friedberg, On the imaginary quadratic Doi-Naganuma lifting of modular forms of arbitrary level, Nagoya Math. J. 92 (1983) 1-20.

[G-Tk] W.T. Gan and S. Takeda, The local Langlands conjecture for $GSp(4)$, to appear in Annals of Math.

[G-Tn] W.T. Gan and W. Tantono, The local Langlands conjecture for $GSp(4)$ II, the case of inner forms, preprint.

[He] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Graduate Studies in Mathematics, Volume 34, American Mathematical Society (2001).

[Hu] J. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Graduate text in Math. 9, Springer Verlag, (1972).

[Ib] 伊吹山知義, Saito-Kurokawa lifting for level N, 本報告書.

[K-S] S. Katok and P. Sarnak, Heeger points, cycles and Maass forms, Israel J. Math. 84 (1993) 193-227.

[Kn] A. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Second edition, Birkhäuser, 2005.

[Ko] H. Kojima, Shimura correspondence for Maass wave forms of half integral weight, Acta Arith. 69 (1995) 367-385.

[Kr] A. Krieg, Modular forms of half-spaces of quaternions, Lecture Notes in Math. vol.1143, Springer-Verlag, (1985).

[Kud-1] S. Kudla, Theta functions and Hilbert modular forms, Nagoya Math. J. 69 (1978) 97-106.

[Kud-2] S. Kudla, On certain arithmetic automorphic forms for $SU(1,q)$, Invent. Math. 52 (1979) 1-25.

[Kud-3] S. Kudla, On certain Euler products for $SU(2,1)$, Compositio Math. 42 (1980/81) 321-344.

[Kur] N. Kurokawa, Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two, Invent. Math. 49 (1978) 149-165.

[La] R. Langlands, Base change for $GL(2)$, Annals of Mathematics Studies 96, Princeton university press, Princeton, N.J., 1980.

[Maa] H. Maass, Über eine Spezialschar von Mudulformen zweiten Grades, I, II, III, Invent. Math. 52 (1979) 95-104, 53 (1979) 249-253, 53 (1979) 255-265.

[Mat] 松本久義, Weil 表現と Howe duality, 本報告書.

[M-S] A. Murase and T. Sugano, On the Fourier-Jacobi expansion of the unitary Kudla lift, Compositio Math. 143 (2007) 1-46.

[Na] H. Narita, Theta lifting from elliptic cusp forms to automorphic forms on $Sp(1, q)$, Math. Z. 259 (2008) 591-615.

[Ni] S. Niwa, Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta functions, Nagoya Math. J. 56 (1975) 147-161.

[Od] T. Oda, On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. 231 (1977/1978) 97-144.

[Ok] T. Okazaki, Proof of R. Salvati Manni and J. Top's conjectures on Siegel modular forms and abelian surfaces, Amer. J. Math. 128 (2006) 139-165.

[Ps] I. I. Piatetski-Shapiro, On the Saito-Kurokawa lifting, Invent. Math. 71 (1983) 309-338.

[Sa] H. Saito, Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, Lectures in mathematics, vol.8, Kyoto Univ., Kyoto, Japan, (1975).

[Sak] 坂田裕, Shimura 対応, 本報告書.

[Sat] I. Satake, Classification theory of semi-simple algebraic groups, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 3. Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.

[Shim] G. Shimura, On modular forms of half integral weight, Ann. of Math. 97 (1973) 440-481.

[Shin-1] T. Shintani, On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight, Nagoya Math. J. 58 (1975) 83-126.

[Shin-2] T. Shintani, On liftings of holomorphic cusp forms, Proc. Sympos. Pure Math. Vol.33, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1979) part2, 97-110.

[Su] 菅野孝史, Oda Lift, 本報告書.

[Yk] 横田一郎, 古典型単純リー群, 現代数学社 (1993).

[Ys] H. Yoshida, Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms, Invent. Math. 60 (1980) 193-248.

[W] J. L. Waldspurger, Correspondence de Shimura, J. Math. Pures et appl., 59 (1980) 1-132.

[Za-1] D. Zagier, Modular forms associated to real quadratic fields, Invent. Math., 30 (1975) 1-46.

[Za-2] D. Zagier, Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'aprés H. Maass), Seminar on Number Theory, Paris 1979-80, 371-394, Progr. Math., 12, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.