## Theta 対応に現れる Cohomological 表現

早田 孝博　(山形大学)

# 1　導入

この小文では「コホモロジカル表現」,「導来関手加群 (derived functor module)」,「エー・キュー・ラムダ ($A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$)」 などと呼ばれている実半単純リー群の表現の定義を Knapp-Vogan の教科書

[KV] Anthony W. Knapp and David A. Vogan, Jr. *Cohomological induction and unitary representations*, volume 45 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

に従って行うことが目的である (§2, §3). これは保型形式論によく現れる正則離散系列表現を含む表現のクラスである. $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ については, もともと

[VZ] David A. Vogan, Jr. and Gregg J. Zuckerman. Unitary representations with nonzero cohomology. *Compositio Math.*, 53(1):51–90, 1984.

が初期の論文であり, ここで $A_q(\lambda)$ は有限次元表現係数のリー環の相対コホモロジーが消えない表現として定義された. この論文は読みやすく, 実用上も十分なものである. 一方 [KV] においては, まず $(\mathfrak{g}, K)$-加群のカテゴリー $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ 上のいくつかの導来関手を定義し, いろいろな誘導がこれで説明されることを示している. そのうちのひとつが, コホモロジカル・インダクションで, 特に $\theta$-stable 放物型部分対 $(\mathfrak{q}, L \cap K)$ の一次元表現からの誘導表現が $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ であると構成的に定義している. また必要な基礎知識が Appendix に網羅されていて詳しい. イントロでコホモロジカルな表現を巡る歴史にも触れており, この分野に関する一通りの概観が得られる.

§4 では改めて離散系列表現を導入する. これは結果的には導来関手加群の特別な場合になる. これは

[Kn] Anthony W. Knapp. *Representation theory of semisimple groups*, volume 36 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. An overview based on examples.

によった.

§5 では, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の例として $Sp(2, \mathbb{R})$ の場合を計算した。$\theta$-stable 放物型部分リー環 $\mathfrak{q}$ の分類や付随するルートデータを計算し, 表現の不変量である無限小指標や極小 $K$-タイプなどをリストアップしてある。

§6 では, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ が現れる例として, Jian-Shu Li の論文

[Li] Jian-Shu Li. Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology. *Duke Math. J.*, 61(3):913–937, 1990.

に従い, $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ における Howe 対応をとりあげた. この論文では, 十分レギュラーな離散系列表現に Howe 対応で対応する表現は $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ であることを示している. 方針としては、実形によらず $\mathfrak{g}$-加群としてのみで決まるという無限小指標の対応 [Pr2] および片側コンパクトの場合に帰着させて $K$-タイプの対応 [松本 2] を見ることにより, Vogan の一意性定理から像が $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ であることを結論付けている. 「十分レギュラー」という条件がついているのは, 行先の $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の正値条件をみたす必要があったからである (この正値条件も後述する 19° より強い). だから §6 の表は完全なものではなく実際にもうすこし条件を緩められ、$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は正値条件を満たさない場合でも, 例えば「離散系列の極限」のような既約なユニタリ表現になることがある. $(\mathrm{Sp}, O)$ の Howe 対応のこの場合も計算したものに片側コンパクトのとき [西山], 一般には [P] に記述されている.

リー環のコホモロジーについてはこの記事では触れなかったが, [BW] が成書であり, 一読を薦める.

全体を通してリー環論, 実リー群の表現の用語は [KV] のものを使用したが, 標準的なものだと信じる. この記事がこの分野の学習の一助になれば幸いである.

# 2 コホモロジカル・インダクション

1°. $\mathfrak{g}$ を複素リー環, $K$ をコンパクト・リー群とする. 次の三条件

1. $K$ のリー環の複素化は $\mathfrak{g}$ の部分リー環である. すなわち $\mathfrak{k} := \mathrm{Lie}\, K \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{g}$.
2. $K$ の $\mathfrak{g}$ 上の作用は $\mathfrak{k}$ 上の随伴作用 $\mathrm{Ad}_K$ の延長になっている (同じ記号で書く. )
3. $d(\mathrm{Ad}_K(K)) = \mathrm{ad}(\mathfrak{k}) \subset \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$

を満たすとき, 対 $(\mathfrak{g}, K)$ と記述する.

2°. 二つの対 $(\mathfrak{h}, L)$, $(\mathfrak{g}, K)$ に対し対の射 $\iota\colon (\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$ とはリー環の準同型 $\iota_{alg}$ とリー群の準同型 $\iota_{gp}$ の対 $\iota = (\iota_{alg}, \iota_{gp})$ であって

1. $\iota_{alg}|_{\mathfrak{l}} = d\,\iota_{gp}$
2. $\iota_{alg} \circ \mathrm{Ad}_L(l) = \mathrm{Ad}_K(\iota_{gp}(l)) \circ \iota_{alg} \quad (l \in L)$

を満たすものと定義する.

3°. 対 $(\mathfrak{g}, K)$ に対し, $C(\mathfrak{g}, K)$ を次の条件を満たす対象 $V$ たちから成るカテゴリーであると定義する.

1. $V$ は局所 $K$-有限な $K$-加群である.
2. $V$ は $\mathfrak{g}$-加群であって, $X \in \mathfrak{g}$, $k \in K$, $v \in V$ のとき, $k(Xv) = (\mathrm{Ad}(k)X)kv$ が成りたつ.

3. $X \in \mathfrak{k}$ の微分作用は $X \in \mathfrak{g}$ としての作用と一致する.

一般に $K$-加群 $V$ に対し, $V_K = \{v \in V \mid \dim_{\mathbb{C}} K \cdot v < \infty\}$ を $K$-有限ベクトルのなす空間とする. すると 1 の条件は $V_K = V$ と書ける.

4°. 対 $(\mathfrak{g}, K)$ に対し, $U(\mathfrak{g})$ を普遍包絡環, $R(K)$ を $K$ 上の $K$-有限ディストリビューションのなす集合とするとき, 次で定義される $R(\mathfrak{g}, K)$ をヘッケ環という.

$$\begin{aligned} R(\mathfrak{g}, K) &:= U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R(K) \simeq R(K) \otimes_{U(\mathfrak{k})} U(\mathfrak{g}) \\ &= U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} R(K) / \langle X \cdot w \otimes T - X \otimes w * T \rangle_{X \in U(\mathfrak{g}),\, w \in U(\mathfrak{k}),\, T \in R(K)} \end{aligned}$$

$R(\mathfrak{g}, K)$ が $K$-有限性から擬単位元を持つので $R(\mathfrak{g}, K)$ は一意に $\mathbb{C}$ 空間になり, 両側 $K$-有限な環になる. $C(\mathfrak{g}, K)$ は左 $R(\mathfrak{g}, K)$ 加群のカテゴリーと同値になる. すなわち

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(V, W) = \mathrm{Hom}_{R(\mathfrak{g},K)}(V, W)$$

5°. $\iota\colon (\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$, $Z \in C(\mathfrak{g}, K)$ に対し, 忘却型関手 $F = F^{\mathfrak{h},L}_{\mathfrak{g},K}\colon C(\mathfrak{g}, K) \to C(\mathfrak{h}, L)$ を

1. $F(V) = V$
2. $r \cdot v = \iota(r) \cdot v \quad r \in R(\mathfrak{h}, L)$

で定義する. $F$ は 完全共変関手 (exact covariant functor) になる.

6°. 関手 $P = P^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{h},L}\colon C(\mathfrak{h}, L) \to C(\mathfrak{g}, K)$ を

1. $P(V) = R(\mathfrak{g}, K) \otimes_{R(\mathfrak{h},L)} V$
2. $r \in R(\mathfrak{g}, K)$ に対し, $r(\omega \otimes v) = (r\omega) \otimes v$

で定義する. $P$ は右完全共変関手 (right exact) になる.

7°. 関手 $I = I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{h},L}\colon C(\mathfrak{h}, L) \to C(\mathfrak{g}, K)$ を

1. $I(V) = \mathrm{Hom}_{R(\mathfrak{h},L)}(R(\mathfrak{g}, K), V)_K$
2. $(r\phi)(x) := \phi(xr) \quad \phi \in I(V),\ r, x \in R(\mathfrak{g}, K)$

で定義する. $I$ は 左完全共変関手 (left exact) になる.

8°. **命題**. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ のとき, $P^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{h},K}, I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{h},K}$ は完全である.

9°. $V \in C(\mathfrak{h}, L)$ の射影分解

$$\cdots \to X_j \to X_{j-1} \to \cdots \to X_0 \to V \to 0 \quad (\text{完全})$$

を考える. このとき関手 $P$ によって得られる $C(\mathfrak{g}, K)$ の列

$$\cdots \to P(X_j) \xrightarrow{\partial_{j-1}} P(X_{j-1}) \to \cdots \to P(X_0) \to 0$$

を考えたとき, $P$ の導来関手 $P_j$ を $P_j(V) = \mathrm{Ker}(\partial_{j-1}) / \mathrm{Im}(\partial_j)$ で定義する. $P_0(V) = P(V)$ である. 同様に入射分解から左完全な $I$ に対し, その導来関手 $I^j(V)$ が定義される.

10°.　$\mathfrak{g}$ の実形を $\mathfrak{g}_0$ とする. すなわち $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}$. また $\mathfrak{g}_0$ には $\theta\colon \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ 対合と非退化二次形式 $\langle\cdot|\cdot\rangle\colon \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \to \mathbb{R}$ が付随しているとする. 次の条件を満たすとき, 対 $(\mathfrak{g}, K)$ は簡約対 (reductive pair) であると定義する.

1. $\langle\cdot|\cdot\rangle$ の $\mathfrak{g}$ への拡張は $\mathrm{Ad}(K)$-不変, また $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-歪対称である.
2. $\mathrm{Lie}(K) = \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0(\theta; 1)$ が成りたつ. また, $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}_0(\theta; -1)$ とおくと, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ である. このとき $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0$ はそれぞれ負定値, 正定値である.
3. $\mathfrak{p}_0 \perp \mathfrak{k}_0$ である.

11°.　簡約対 $(\mathfrak{g}, K)$ に対し, $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ を $\theta$-stable カルタン部分リー環とする. すなわち $\theta(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$. (複素) 放物型部分リー環 $\mathfrak{q}$ のレビ分解を $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ とする. $\mathfrak{q}$ が, $\theta\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$ かつ $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{h}$ を満たすとき, $\theta$-stable 放物型部分リー環と呼ぶ. $\theta$-stable という性質から $\mathfrak{l}$ は実形 $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ をもつ. $L \cap K$ はリー環 $\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ を持つコンパクト部分群である. このとき 対 $(\mathfrak{q}, L \cap K)$ は 1° を満たし, 特に, ($\theta$-stable) 放物型部分対と呼ぶ. また対 $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ は簡約対になる.

12°.　$\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}_0$ と定める. $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}), \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ などでそれぞれのルート系を定める. $\delta_G, \delta_c, \delta_L$ でそれぞれ, $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}$ の正ルートの半分和を表わす. また $\Delta(\mathfrak{u})$ で $\mathfrak{u}$ に含まれるルートを表わし, $\delta(\mathfrak{u})$ でその半分和を表わす. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し, $\sqrt{-1}\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{a}_0$ 上の値を実と定めることにより, $\mathrm{Re}(\lambda)$ が定義される.

13°.　$Z \in \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K)$ に対し, $Z^\# = Z \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^{\mathrm{top}}\mathfrak{u}$ とおく. $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ 加群として $\wedge^{\mathrm{top}}\mathfrak{u} \simeq \mathbb{C}_{2\delta(\mathfrak{u})}$ である. $Z$ のコホモロジカル・インダクション $L_j, R^j$ を以下のように定義する.

$$L_j(Z) := \left(P^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{g},L\cap K}\right)_j \circ P^{\mathfrak{g},L\cap K}_{\bar{\mathfrak{q}},L\cap K} \circ F^{\bar{\mathfrak{q}},L\cap K}_{\mathfrak{l},L\cap K}(Z^\#)$$
$$R^j(Z) := \left(I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{g},L\cap K}\right)^j \circ I^{\mathfrak{g},L\cap K}_{\mathfrak{q},L\cap K} \circ F^{\mathfrak{q},L\cap K}_{\mathfrak{l},L\cap K}(Z^\#)$$

ただし, $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{l} + \bar{\mathfrak{u}}$ は逆向き放物型リー環 (opposite) を表す. このとき,

$$L_j(Z), R^j(Z)\colon \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K) \to \mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$$

は共に共変関手になる.

14°.　**消滅定理** [KV, 5.35].　$S := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})$ とおく. $j > S$ であれば, $L_j(Z) = R^j(Z) = 0$.

15°.　[Kn, §VIII.5].　$W_G$ をワイル群とする. $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は Harish-Chandra 写像

$$\gamma_{\mathfrak{g}}\colon Z(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})^{W_G}$$

により, $U(\mathfrak{h})$ の $W_G$ により固定される元全体と同型になる. よって $\chi\colon Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ は, ある $\lambda \in \mathfrak{h}^*/W_G$ により,

$$\chi(z) = \chi_\lambda(z) = \lambda(\gamma_{\mathfrak{g}}(z)) \qquad (z \in Z(\mathfrak{g}))$$

と表される. $V \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ 上 $Z(\mathfrak{g})$ がスカラー $\chi_\lambda$ で作用するとき, $V$ は無限小指標 $\chi_\lambda$ (あるいは単に $\lambda$) を持つという.

16°.　$\mathfrak{g}_0$ はある実リー群 $G$ のリー環であるとすると $L \subset G$ となるが, このとき,

**条件** (5.7)　「$L$ は $G$ の既約連結成分すべてと交わる」

と設定する.

17°.　**定理** [KV, 5.25]. **条件** (5.7) を仮定する. $Z \in \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K)$ が無限小指標 $\lambda$ を持つとき, $L_j(Z)$, $R^j(Z) \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ は無限小指標 $\lambda + \delta(\mathfrak{u})$ を持つ.

18°.　**定理** [KV, 5.99]. **条件** (5.7) を仮定する. また $Z \in \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K)$ が無限小指標 $\lambda$ を持ち, かつ admissible であるとする. さらに条件

$$\langle \mathrm{Re}\,\lambda + \delta(\mathfrak{u}) \mid \alpha \rangle \geq 0 \quad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}))$$

を満たすならば, $0 \leq j < S$ に対し, $L_j(Z) = R^j(Z) = 0$ であり, さらに (零かもしれないが) $L_S(Z) \simeq R^S(Z)$ が成りたつ.

19°.　**定理** [KV, 8.2]. **条件** (5.7) を仮定する. また $Z \in \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K)$ が無限小指標 $\lambda$ を持つ admissible な既約 $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ 加群であるとする. $\lambda$ が正値条件

**正値条件**　$$\langle \mathrm{Re}\,\lambda + \delta(\mathfrak{u}) \mid \alpha \rangle > 0 \quad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}))$$

を満たすならば, $L_S(Z) \simeq R^S(Z)$ であり, かつこれらは零でない既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群になる.

# 3　$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$

§2 に加えて, 以下の設定を行う. $G$ を連結な簡約実リー群とし, $K$ をその極大コンパクト部分群とする. また, $\mathfrak{t}_0$ を $\mathfrak{k}_0$ の極大可換部分リー環とし, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{t}$ を含む $\theta$-stable カルタン部分代数とする. 前 § に従って, 簡約対 $(\mathfrak{g}, K)$ および放物型部分対 $(\mathfrak{q}, L \cap K)$ を考える. $\Delta(\mathfrak{u})$ が正になるように $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の正系を定める. 連結にとったので, **条件** (5.7) は満たされる.

20°.　$Z \in \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K)$ として, 最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が $\langle \lambda \mid \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) \rangle = 0$ をみたす 1 次元 $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ 加群 $\mathbb{C}_\lambda$ をとる. $\mathbb{C}_\lambda$ は無限小指標 $\lambda + \delta_L$ を持つ. このとき,

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) := L_S(\mathbb{C}_\lambda), \quad A^{\mathfrak{q}}(\lambda) := R^S(\mathbb{C}_\lambda)$$

と定義する.

21°.　**系** [KV, 5.109]. 上の条件のもと,

1. $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は無限小指標 $\lambda + \delta_G$ を持つ.
2. $\lambda$ が**正値条件**
$$\langle \mathrm{Re}\,\lambda + \delta(\mathfrak{u}) \mid \alpha \rangle > 0 \quad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}))$$
を満たすならば, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \simeq A^{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は既約かつ非零になる.

22°.　$(\mathfrak{g}, K)$ 加群 $V$ において, $K$-加群としての $V$ に現れる $K$ の既約表現を $K$-タイプという. 最高ウェイトが $\mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}_0^*$ の $K$-タイプが極小 $K$-タイプであるとは, $\sqrt{\langle \mu + 2\delta_c \mid \mu + 2\delta_c \rangle}$ が極小である, と定義する.

23°.　**定理** [KV, 9.70,10.24]. 上の条件のもと,

1. $\lambda|_{\mathfrak{t}_0}$ が実, $\lambda|_{\mathfrak{a}_0}$ が純虚ならば, ユニタリ化可能.
2. $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の $K$-タイプの最高ウェイトは $\lambda$ をワイル元で動かしてうまく $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ に関して正にとることにより,

$$\lambda + 2\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})} n_\alpha \alpha \quad (n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

   の形で表される. 特に極小 $K$-タイプは $\lambda + 2\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ の最高ウェイトを持つ.

24°. **注意**. 23° の $K$-タイプの公式は $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ にのみ依存している. したがって二つの異なる $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ であっても $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ が同じであれば $A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \simeq A_{\mathfrak{q}'}(\lambda)$ である.

# 4 離散系列表現

記号, 設定などは §3 を引き継ぐ. ただし $G$ の中心はコンパクトと仮定する.

25°. $G$ の既約ユニタリ表現 $D$ に対し $K$-有限ベクトル全体 $D_K$ は $(\mathfrak{g}, K)$ 加群である. $v, w \in D_K$, $x \in G$ に対しユニタリ内積に関しての行列係数 $\langle x \cdot v, w \rangle$ が $G$ 上の二乗可積分関数であるとき, $D$ を離散系列表現という. $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 $D_K$ も乱用して離散系列表現と呼ぶ.

26°. **離散系列表現の存在定理** [Kn, 12.20]. 離散系列 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群が存在する必要十分条件は $G$ がコンパクトカルタン部分群を持つことである. すなわち $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$.

27°. 25° のもと, 「**ランク条件** $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$」を, 以下仮定する.

28°. **定理** [Kn, 9.20]. $\mu \in (\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$ を固定する. $\mu > 0$ となるような正系をとる. $\Lambda = \mu + \delta_G - 2\delta_c$ が $K$ の最高ウェイトの生成する格子に入ると仮定する. もし $\mu$ が非特異ならば, つまり, ワイルの壁にのっていないならば次の三条件で特徴付けられる離散系列 $D_\mu$ が一意に存在する.

1. $D_\mu$ の無限小指標は $\mu$ である.
2. $D_\mu$ はただひとつの極小 $K$-タイプ $\Lambda$ を重複度 1 で持つ.
3. $D_\mu$ の $K$-タイプは

$$\Lambda + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{p}),\, \alpha > 0} n_\alpha \alpha \qquad (n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

   の形に表される.

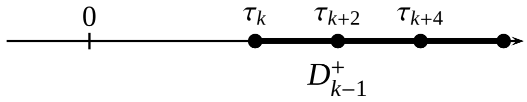
29°. $W_G, W_K$ をそれぞれ $G, K$ のワイル群とする. このとき $D_\mu \simeq D_{\mu'}$ となるのは $\mu = w\mu'$ となる $w \in W_K$ が存在するときに限る. このことと 15° により, 特に, 同じ無限小指標 $\mu$ を持つ互いに同型でない離散系列は $|W_G/W_K|$ 個存在する.

30°. 離散系列 $D_\mu$ において, $\mu$ を Harish-Chandra パラメータという. また, $\Lambda$ を Blattner パラメータという.

一般に, $V \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ の無限小指標を HC = HC($V$) と表し, 極小 $K$-タイプを BL = BL($V$) と表すことにする. すると HC($D_\mu$) = $\mu$, BL($D_\mu$) = $\Lambda$ である. また, HC($A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$) = $\lambda + \delta_G$ (21°), BL($A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$) = $\lambda + 2\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ (23°) である.

31°. **例**: $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ とする. $K = SO(2)$ であり $\tau_k\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = e^{ik\theta}$ とおく. $\delta_G = 1$ である. 同じ無限小指標 $\mu$ を持つ離散系列表現は $|W_G/\{1\}| = 2$ 個ある. $k \geq 2$ として

$$D^+_{k-1} = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \tau_{k+2l}, \quad D^-_{k-1} = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \tau_{-k-2l},$$




を考えると $\mathrm{HC}(D^{\pm}_{k-1}) = \pm(k-1)$, $BL(D^{\pm}_{k-1}) = \pm k$ となる. (無限小指標を $(k-1)$ と書いても $-(k-1)$ と書いてもワイル群で同値なので指標としては変らないのだが、28° により、HC は正系を考慮したものにしている.)

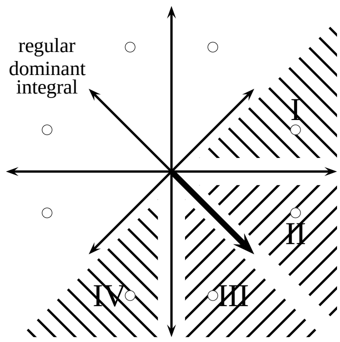
32°. **例**: $G = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ とする. $K \simeq U(2)$ となる. $\mathrm{rank}(G) = \mathrm{rank}(K)$ より $G$ は**ランク条件** を満し離散系列表現を持つ. $|W_G/W_K| = 4$ である. $G$ は $C_2$-ルート系 $\{\pm(e_1 \pm e_2), \pm 2e_1, \pm 2e_2\}$ を持つ. コンパクト正ルートを $e_1 - e_2$ と固定する. $(k_1, k_2) \to k_1e_1 + k_2e_2$ で $\mathbb{R}^2$ と $(\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$ を右図のように同一視する. 最高ウェイト $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ の $K$-タイプは $\mathrm{sym}^{\Lambda_1-\Lambda_2} \otimes \det^{\Lambda_2}$ になる.

(I). $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathrm{I}$ のとき, $\delta_G = (2, 1)$, $\delta_c = (1/2, -1/2)$ より $\Lambda = (\mu_1 + 1, \mu_2 + 2)$.

(II). $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathrm{II}$ のとき, $\delta_G = (2, -1)$, $\Lambda = (\mu_1 + 1, \mu_2)$.

(III). $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathrm{III}$ のとき, $\delta_G = (1, -2)$, $\Lambda = (\mu_1, \mu_2 - 1)$.

(IV). $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathrm{IV}$ のとき, $\delta_G = (-1, -2)$, $\Lambda = (\mu_1 - 2, \mu_2 - 1)$.




33°. **定理** [KV, 11.178]. **ランク条件** のもと, $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ は $\mathfrak{q}$ がボレル部分群 $\mathfrak{b}$ であるとき, つまり $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}$ であるとき離散系列 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群になる. またすべてのボレル部分群を動かすことにより離散系列は $A_\mathfrak{b}(\lambda)$ で尽される.

# 5 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の導来関手加群

ここでは $G = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ とする. **ランク条件** が成立しているので, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$ である. 32° の設定を継続し $(\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$ は $\mathbb{R}^2$ と同一視する. 23°(2) より, $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{h})$ の正系は固定してよい.

34°. $\theta$-stable 放物型部分リー環 $\mathfrak{q}$ は次のようにして得られる. $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対し, $\mathfrak{g}_\alpha$ をルート空間とする. $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{h})$ の正系に関して非負な $\xi \in (\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$ をとる毎に次のように $\mathfrak{q}$ を構成する.

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u} \qquad (\text{複素})$$
$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\, \langle\alpha,\xi\rangle=0} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{u} = \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\, \langle\alpha,\xi\rangle>0} \mathfrak{g}_\alpha$$

実際は $\xi$ が同じワイルの部屋, または境界成分に入っていると同じ $\mathfrak{q}$ を定める. 特に $\xi = 0$ のとき, $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$ となる. 35°～44° により $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の $\theta$-stable 放物型部分リー環 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ はすべて尽くされる.

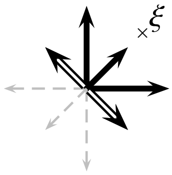
35°. $\mathfrak{q} = Q^{3,0}_{(0)}$

$L = K, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{k}$

$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(1,1)} + \mathfrak{g}_{(0,2)} = \mathfrak{p}_+$

$\delta_G = (2,1)$

$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$



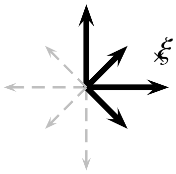

36°. $\mathfrak{q} = Q^{3,0}$

$L = T, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{t}$

$\mathfrak{u} = \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{g}_{(1,-1)}$

$\delta_G = (2,1)$

$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$




37°. $\mathfrak{q} = Q^{2,0}$

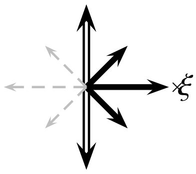
$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}_{(0,2)} + \mathfrak{g}_{(0,-2)}$

$L \simeq U(1) \times \mathrm{Sp}(1,\mathbb{R})$

$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(1,1)} + \mathfrak{g}_{(1,-1)}$

$\delta_G = (2,1)$

$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$



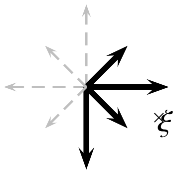

38°. $\mathfrak{q} = Q^{2,1}$

$L = T, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{t}$

$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(1,1)}$
$\quad + \mathfrak{g}_{(0,2)} + \mathfrak{g}_{(1,-1)}$

$\delta_G = (2,-1)$

$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$




39°. $\mathfrak{q} = Q^{1,1}$

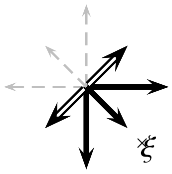
$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}_{(1,1)} + \mathfrak{g}_{(-1,-1)}$

$L \simeq U(1) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(1,-1)} + \mathfrak{g}_{(0,-2)}$

$\delta_G = (2,-1)$

$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (1,-1)$



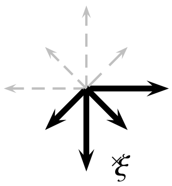

40°. $\mathfrak{q} = Q^{1,2}$

$L = T, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{t}$

$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(1,-1)}$
$\quad + \mathfrak{g}_{(0,-2)} + \mathfrak{g}_{(-1,-1)}$

$\delta_G = (1,-2)$

$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$




41°. $\mathfrak{q} = Q^{0,2}$

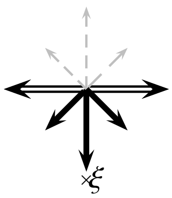
$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(-2,0)}$

$L \simeq \mathrm{Sp}(1,\mathbb{R}) \times U(1)$

$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(0,-2)} + \mathfrak{g}_{(1,-1)} + \mathfrak{g}_{(-1,-1)}$

$\delta_G = (-1,-2)$

$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$



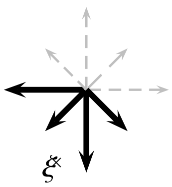

42°. $\mathfrak{q} = Q^{0,3}$

$L = T, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{t}$

$\mathfrak{u} = \mathfrak{p}_- + \mathfrak{g}_{(1,-1)}$

$\delta_G = (-1,-2)$

$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$



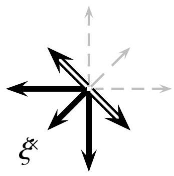
43°. $\mathfrak{q} = Q^{0,3}_{(0)}$

$L = K, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{k}$

$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(0,-2)} + \mathfrak{g}_{(-1,-1)} + \mathfrak{g}_{(-2,0)}$
$\quad = \mathfrak{p}_-$

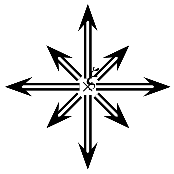
$\delta_G = (-1, -2)$

$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2})$




44°.

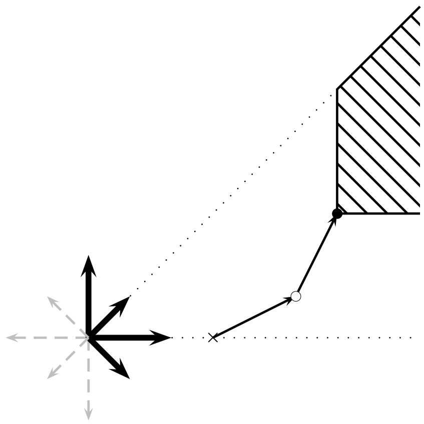
$\mathfrak{q} = Q^{0,0}, \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{g}, \quad L = G$



45°. 次に, $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ の $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ を求める．都合上 $\lambda := \mathrm{AQ}(A_\mathfrak{q}(\lambda))$ と定める．$\mathbb{C}_\lambda$ は $L$ の一次元表現であり, $\langle \lambda \mid \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) \rangle = 0$ であった (20°). $\lambda$ が**正値条件** を満たすときそれぞれの $\theta$-stable $\mathfrak{q}$ の $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ の無限小指標 (白丸), 極小 $K$- タイプ (黒丸) および $K$-タイプの最高ウェイト格子上の分布 (斜線部) を, 46°～49° に, 図示した．なお, 24° より, $q = Q^{3,0}_{(0)}$ のときは $q = Q^{3,0}$ と, $q = Q^{0,3}_{(0)}$ のときは $q = Q^{0,3}$ と同じ $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ を与える．また, $q = Q^{0,0} = \mathfrak{g}$ のときは単位表現になる．さらに $q = Q^{i,j}$ と $Q^{j,i}$ は互いに反傾関係であるため, $\mathbb{R}^2$ 内の各パラメータは $(x, y) \mapsto (-y, -x)$ で読みとることができる (46°,47°,48°). 49° は自己双対的である。

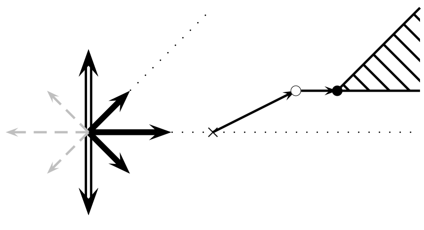
46°. $\mathfrak{q} = Q^{3,0}$ のとき,

AQ : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$
HC : $\lambda + (2, 1)$
BL : $\lambda + (3, 3)$
$A_\mathfrak{q}(\lambda)$ : 正則離散系列表現



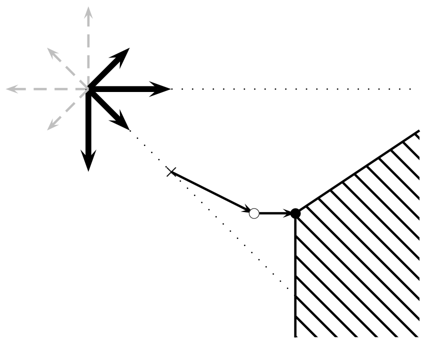
47°. $\mathfrak{q} = Q^{2,0}$ のとき,

AQ : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_1),\ \lambda_1 \geq -1$
HC : $\lambda + (2, 1)$
BL : $\lambda + (3, 1)$
$A_\mathfrak{q}(\lambda)$ : ユニタリ最高ウェイト表現

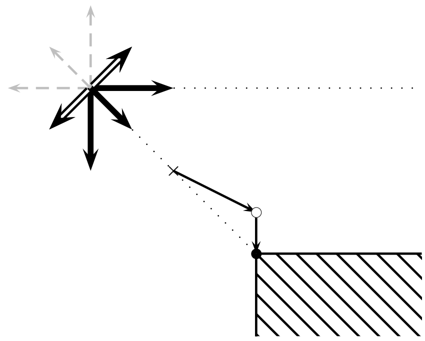


48°. $\mathfrak{q} = Q^{2,1}$ のとき

AQ : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 \geq -\lambda_2 \geq 0$
HC : $\lambda + (2, -1)$
BL : $\lambda + (3, -1)$
$A_\mathfrak{q}(\lambda)$ : 大離散系列表現



49°.　$\mathfrak{q} = Q^{1,1}$ のとき,



AQ : $\lambda = (\lambda_1, -\lambda_1)$, $\lambda_1 \geq -1$
HC : $\lambda + (2, -1)$
BL : $\lambda + (2, -2)$
$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ : non-tempered 表現

# 6　$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ の Howe 対応

50°.　Howe 対応の記号を整理する. Howe 対応については [松本 2] を参照のこと. $G_1, G_2 \subset \mathrm{Sp}$ を dual pair とし, $(\omega, \mathcal{P})$ を Sp の Fock モデル (=Weil 表現の $(\mathfrak{g}, K)$-加群) とする.

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}_i, \tilde{K}_i, \mathcal{P}) = \{V\colon \text{既約 } (\mathfrak{g}_i, \tilde{K}_i) \text{ 加群} \mid V \text{ は } \mathcal{P} \text{ の商加群}\}$$

で定義すると, Howe 対応 $V_2 = \theta(V_1)$ とは次の全単射である.

$$\begin{aligned} \theta\colon \mathcal{R}(\mathfrak{g}_1, \tilde{K}_1, \mathcal{P}) \ni V_1 \leftrightarrow V_2 \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}_2, \tilde{K}_2, \mathcal{P})&\colon \ \text{全単射} \\ \text{by } \ V_1 \otimes V_2 \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2, \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_2, \mathcal{P})& \end{aligned}$$

　ここでは, 片側が $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ の場合の Howe 対応をここまで用意したパラメータを利用して記述する. “even case” のとき,

$$G_1 = O(4),\ O(2),\ O(2, 2), \qquad G_2 = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R}),$$

の dual pair を考える. また, $SO_0(3, 2) \simeq \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ とみることができるので

$$G_1 = \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}), \qquad G_2 = O(3, 2)$$

の dual pair を考える. この場合に, [Li, 6.2] を適用する.

51°.　$G_1 = O(4), G_2 = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ のとき. $V_1$ は有限次元表現. $V_2 = \theta(V_1)$ は正則離散系列表現になる.

| | $V_1$ of $O(4)$ | $V_2$ of $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ |
|---|---|---|
| HC | $(a_1, a_2)$ | $(a_1, a_2)$ |
| | $(a_1 > a_2 \geq 1)$ | |
| BL | $(a_1 - 1, a_2)$ | $(a_1 + 1, a_2 + 2)$ |
| AQ | | $(a_1 - 2, a_2 - 1)$ |
| $\mathfrak{q}$ | | $Q^{3,0}$ |

52°.　$G_1 = O(2), G_2 = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ のとき. $V_1$ は二次元既約表現. $V_2$ は離散系列ではないユニタリ最

高ウェイト表現になる.

| | $V_1$ of $O(2)$ | $V_2$ of $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ |
|---|---|---|
| HC | $a_1$ | $(a_1, 1)$ |
| | $(a_1 \geq 2)$ | |
| BL | $a_1$ | $(a_1 + 1, 1)$ |
| AQ | | $(a_1 - 2, 0)$ |
| $\mathfrak{q}$ | | $Q^{2,0}$ |

53°. $G_1 = O(2,2)$, $G_2 = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ のとき. $V_1$ は HC が $(a,b)$ の「正則離散系列表現」であって、その極小 $K$-タイプは 4 次元既約表現 $\mathrm{Ind}_{K_1^\circ}^{K_1} \tau_{a+1} \boxtimes \tau_b$ となるもの (31°) である. $V_2 = \theta(V_1)$ は大離散系列表現になる.

| | $V_1$ of $O(2,2)$ | $V_2$ of $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ |
|---|---|---|
| HC | $(a,b)$ | $(a,-b)$ |
| | $(a > b \geq 1)$ | |
| BL | $(a+1,b)$ | $(a+1,-b)$ |
| AQ | | $(a-2, 1-b)$ |
| $\mathfrak{q}$ | | $Q^{2,1}$ |

54°. $G_1 = \widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$, $G_2 = \mathrm{Sp}(2,R) \sim SO_0(3,2) \subset O(3,2)$ のとき. $V_1$ は「genuine」な離散系列表現, $V_2 = \theta(V_1)$ はパラメータによって,「スカラー」正則離散系列または non-tempered な $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ になる.

| | $V_1$ of $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ | $V_2$ of $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ |
|---|---|---|
| HC | $a - 1/2$ | $(a, -a+1)$ |
| | $(a \geq 2)$ | |
| BL | $a + 1/2$ | $(a, -a)$ |
| AQ | | $(a-2, 2-a)$ |
| $\mathfrak{q}$ | | $Q^{1,1}$ |

| | $V_1$ of $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ | $V_2$ of $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ |
|---|---|---|
| HC | $-b + 1/2$ | $(b, b-1)$ |
| | $(b \geq 2)$ | |
| BL | $-b - 1/2$ | $(b+1, b+1)$ |
| AQ | | $(b-2, b-2)$ |
| $\mathfrak{q}$ | | $Q^{3,0}_{(0)}$ |

# 参考文献


[西山] 西山 享、「Reductive Dual Pair と Weil 表現」 第 4 回整数論サマースクール報告集, p.63–88, 1996.

[松本 1] 松本 久義、「Howe Duality の解説」 第 4 回整数論サマースクール報告集, p.151–168, 1996.

[松本 2] ———— ,「Weil 表現と Howe duality」, この報告集.

[BW] A. Borel and N. Wallach. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, volume 67 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2000.

[Kn] Anthony W. Knapp. *Representation theory of semisimple groups*, volume 36 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. An overview based on examples.

[KV] Anthony W. Knapp and David A. Vogan, Jr. *Cohomological induction and unitary representations*, volume 45 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[Li] Jian-Shu Li. *Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology. Duke Math. J.*, 61(3):913–937, 1990.

[M] C. Mœglin. *Correspondance de Howe pour les paires reductives duales: quelques calculs dans le cas archimédien. J. Funct. Anal.*, 85(1):1–85, 1989.

[P] Annegret Paul. *On the Howe correspondence for symplectic-orthogonal dual pairs. J. Funct. Anal.*, 228(2):270–310, 2005.

[Pr1] Tomasz Przebinda. *The oscillator duality correspondence for the pair* $\mathrm{O}(2,2),\ \mathrm{Sp}(2,\mathbf{R})$. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 79(403):x+105, 1989.

[Pr2] Tomasz Przebinda. *The duality correspondence of infinitesimal characters. Colloq. Math.*, 70(1):93–102, 1996.

[VZ] David A. Vogan, Jr. and Gregg J. Zuckerman. *Unitary representations with nonzero cohomology. Compositio Math.*, 53(1):51–90, 1984.