Functoriality Principle

吉田敬之（京都大学）

本稿は整数論 summer school での 90 分講演のために用意した原稿に手を入れたものである. Functoriality principle はそれだけで優に summer school のテーマになりうるもので, 短くまとめるのには無理があるが, 勘所は書けていると思う. 志村ー谷山予想の一般化についての最後の節は講演では話せなかったが, 興味ある問題なので簡単にふれておいた. また参加者には思ったより若い人が多かったので, 勉強等の参考のための文献案内を最後に付けた.

記号. 体 F 上の代数群 G と F の拡大体 K に対して, $G(K)$ は G の K 有理点の成す群を表す. より一般に G が可換環 R 上の group scheme, S が R-algebra のとき, $G(S)$ は G の S-valued points の成す群を表す. global field とは有限次代数体, または有限体上の一変数代数函数体のことである. F は global field とする. F_A, $F_A^\times$ によってそれぞれ F のアデール環, イデール群を表す. G は F 上の代数群とする. G のアデール化を G_A と書く. F_A を F-algebra とみたとき $G_A = G(F_A)$ である. G_A の 既約 automorphic representation 全体の集合を $\mathcal{A}(G_A)$ と書く. 本文では reductive algebraic group を単に reductive group と呼んだ.

§0. Motivation

E は $\mathbf{Q}$ 上定義された elliptic curve とする. 志村ー谷山予想によれば Hecke eigenform $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ があって

$$L(s,E) = L(s,f) \tag{0.1}$$

となる. ここに N は E の conductor である. この予想は非常に深いものを含んでいて思考実験によって functoriality principle の原型を得ることができる. これをまず説明しよう.

(1) E は虚二次体 K で虚数乗法をもつとする. このとき Deuring によれば $K_A^\times/K^\times$ の Hecke 指標（量指標）ψ があって $L(s,E) = L(s,\psi)$ となる. ψ は $GL(1,K_A)$ 上の automorphic form とみなせるから, $\psi \mapsto f$ は $GL(1,K_A)$ 上の automorphic form から $GL(2,K_A)$ 上の automorphic form への対応を与えている. 量指標の L 函数に対応する modular form は Hecke によって構成されたが, これは endoscopic lift のもっとも簡単な例になっている.

(2) F は実二次体, E は F 上定義された elliptic curve とする．志村ー谷山予想を naive に拡張すれば $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_F)$ についての weight が $(2,2)$ の Hilbert modular form f があって $L(s,E) = L(s,f)$ となる．[1] 初めに $\mathbf{Q}$ 上定義された elliptic curve E_0 があり E は E_0 を F 上定義された elliptic curve とみなすことで得られているとする．即ち E は E_0 の F への base change $E = E_0 \otimes_{\mathbf{Q}} F$ である． このとき E_0 に対応する elliptic modular form f_0 から Hilbert modular form f への対応が得られ, 両者は $L(s,f) = L(s,f_0)L(s,f_0 \otimes \chi)$ の関係で結ばれている．ここに χ は F に対応する Dirichlet 指標である．f_0 が elliptic curve から得られていない場合でもこの関係で elliptic modular form f_0 から得られる Hilbert modular form f がある, というのが土井ー長沼 lift, あるいは base change lift である．

(3) D は総実体 F 上の quaternion algebra とする．このとき $D_A^\times$ 上の automorphic form の空間は $\mathrm{GL}(2, F_A)$ 上の automorphic form の空間に Hecke 作用素の固有値を保って含まれている．即ち $\mathcal{A}(D_A^\times) \subset \mathcal{A}(\mathrm{GL}(2, F_A))$ である．これは Eichler-Shimizu-Jacquet-Langlands による結果であるが, functoriality の簡単な例である．

(4) (0.1) 式に戻り, f に対応する $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Q}_A)$ の automorphic representation を $\pi = \otimes_v \pi_v$ とする．$v = p$ が素数のとき, E が p で potential good reduction を持つための必要十分条件は π_p が special 表現ではないことである (Langlands-Deligne-Carayol).

志村ー谷山予想を一般化して次の問題が考えられる．F は代数体として

$$\rho_\lambda : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}(d, E_\lambda)$$

を λ-adic representation とする．ρ_λ は motivic と仮定する．ρ_λ に対応する automorphic representation は何か．これについては最後の節でふれることにする．

§1. Reductive groups

この節では L 群を定義するのに必要な代数的閉体上の reductive group の理論を復習する．

四つ組

$$\Psi = (X, \Phi, \check{X}, \check{\Phi})$$

を考える．ここに $X \cong \mathbf{Z}^n$, $\check{X} = \mathrm{Hom}(X, \mathbf{Z})$ は X の dual, $\Phi \subset X$ と $\check{\Phi} \subset \check{X}$ は有限集合である．Φ から $\check{\Phi}$ への bijection があると仮定し, $\alpha \in \Phi$ をこの bijection で写したものを $\check{\alpha}$ と書く．X と $\check{X}$ の paring を $\langle\ ,\ \rangle$ で表す．$\alpha \in \Phi$ に対して

$$s_\alpha(x) = x - \langle x, \check{\alpha} \rangle \alpha, \qquad x \in X,$$

[1] F の類数が 1 より大きい場合は $\mathrm{GL}(2, F_A)$ 上の automorphic form によって定式化すればよい．F は任意の代数体でもよい．この場合の証明はまだ得られていない．

$\check{\alpha} \in \check{\Phi}$ に対して

$$s_{\check{\alpha}}(y) = y - \langle y, \alpha \rangle \check{\alpha}, \qquad y \in \check{X}$$

とおく．この状況で次の条件 (1), (2) が成り立つとき, Ψ は root datum であるという．

$$\langle \alpha, \check{\alpha} \rangle = 2, \qquad \forall \alpha \in \Phi. \tag{1}$$

$$s_\alpha(\Phi) \subset \Phi, \qquad s_{\check{\alpha}}(\check{\Phi}) \subset \check{\Phi}, \qquad \forall \alpha \in \Phi. \tag{2}$$

Φ は（空集合でないならば）Bourbaki の意味での root system になる．

F は体とする．$\overline{F}$ により F の分離閉包を表す．F が標数 0 ならば $\overline{F}$ は F の代数的閉包である．G は F 上定義された connected reductive group とする．G を $\overline{F}$ 上定義された reductive group とみなす．このとき root datum

$$R(G, T) = (X^*(T), \Phi, X_*(T), \check{\Phi})$$

が得られる．ここに T は ($\overline{F}$ 上に定義された) G の maximal torus, $X^*(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m)$ は T の character group, Φ は root の集合, $X_*(T) = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ は T の cocharacter group, $\check{\Phi}$ は coroot の集合である．

定理 1.1. *Ψ は root datum で Φ は reduced と仮定する．$F = \overline{F}$ と仮定する．このとき F 上定義された connected reductive group G で $R(G, T) = \Psi$ をみたすものが存在する．G の F 上の同型類は唯一つである．*

定理 1.1 は本質的に Chevalley による存在定理である．Φ が reduced とは $\alpha, n\alpha \in \Phi$, $2 \leq n \in \mathbf{Z}$ とはならないことを言う．

G の $\overline{F}$ 上に定義された Borel 部分群 B を $B \supset T$ ととる．このとき root は positive root と negative root に分かれ, simple root が決まる．Δ を simple root の集合, $\check{\Delta}$ を simple coroot の集合とする．

$$R_0(G, B, T) = (X^*(T), \Delta, X_*(T), \check{\Delta})$$

とおき, これを based root datum という．$R_0(G)$ とも書く．

例 1.2.

$$G = \mathrm{GL}(n), \qquad T = \left\{ t = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{pmatrix} \right\}$$

とする．$\epsilon_i : t \mapsto t_i$ は T の character を定義し

$$X^*(T) = \mathbf{Z}\epsilon_1 \oplus \mathbf{Z}\epsilon_2 \cdots \oplus \mathbf{Z}\epsilon_n$$

である. $\check{\epsilon}_i : u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & u & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ ((i,i) 成分に u をおく) は T の cocharacter を定義し

$$X_*(T) = \mathbf{Z}\check{\epsilon}_1 \oplus \mathbf{Z}\check{\epsilon}_2 \cdots \oplus \mathbf{Z}\check{\epsilon}_n$$

である. $u \in \mathbf{G}_m$ に対し

$$\epsilon_i(\check{\epsilon}_j(u)) = \begin{cases} u, & i = j, \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

から, $\langle \epsilon_i, \check{\epsilon}_j \rangle = \delta_{ij}$ となる.

$$\Phi = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\},$$

$$\check{\Phi} = \{\check{\epsilon}_i - \check{\epsilon}_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

である. B を上半三角行列からなる群ととったとき positive roots の集合 Φ^+ は

$$\Phi^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

である. よって

$$\Delta = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n\}$$

となる. 同様に

$$\check{\Delta} = \{\check{\epsilon}_1 - \check{\epsilon}_2, \check{\epsilon}_2 - \check{\epsilon}_3, \ldots, \check{\epsilon}_{n-1} - \check{\epsilon}_n\}$$

である.

G の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(G)$ について

$$\mathrm{Out}(G) \cong \mathrm{Aut}(R_0(G)) \cong \mathrm{Aut}(G, B, T, \{u_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}) \tag{1.1}$$

が成り立つ. ここに $u_\alpha \neq 1$ は α に対応する root 部分群から任意に取った自明でない元で, $\mathrm{Aut}(G, B, T, \{u_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$ は B, T, $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ を stabilize する $\mathrm{Aut}(G)$ の部分群を表す. (1.1) から次の定理が得られる.

定理 1.3. 完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Inn}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Out}(G) \longrightarrow 1$$

は分裂する.

§2. L-groups

F は体とする．G は F 上定義された connected reductive group とする．G を $\overline{F}$ 上定義された reductive group とみなし, $\overline{F}$ 上定義された G の maximal torus T と T を含む Borel 部分群 B をとる．このとき based root datum $R_0(G) = (X^*(T), \Delta, X_*(T), \check{\Delta})$ が定まるが準同型

$$\mu_G : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}(R_0(G)) \tag{2.1}$$

が得られる．(2.1) を簡単に説明しておこう．$\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ をとる．$\sigma(B)$ は G の Borel 部分群であるから, $g \in G(\overline{F})$ があって $\sigma(B) = gBg^{-1}$ となる．$\sigma(T)$ は $\sigma(B)$ に含まれる maximal torus であるから, $\sigma(T) = gTg^{-1}$ でもある．$\chi \in X^*(T)$ に対し $\sigma\chi \in X^*(\sigma(T))$ を

$$(\sigma\chi)(\sigma(t)) = \sigma(\chi(t)), \qquad t \in T$$

で定める．

$$\chi_\sigma(t) = (\sigma\chi)(g^{-1}tg), \qquad t \in T$$

とおくと, $\chi_\sigma \in X^*(T)$ である．対応 $\chi \mapsto \chi_\sigma$ は $X^*(T)$ の自己同型であり, positive roots を positive roots に写している．$X^*(T)$ への作用についても同様である．

定理 1.1 により, $\mathbf{C}$ 上の connected reductive group ${}^LG^0$ を

$$R_0({}^LG^0) = (X_*(G), \check{\Delta}, X^*(T), \Delta) \tag{2.2}$$

と取ることができる．${}^LG^0$ を connected L-group という．${}^LG^0$ は G の $\overline{F}$ 上の同型類にのみ依存する．

例 2.1. 例 1.2 により $G = \mathrm{GL}(n)$ のとき ${}^LG^0 = \mathrm{GL}(n)$ である．

例 2.2. G は semisimple とする．G が simply connected ならば ${}^LG^0$ は adjoint type である．G が古典型のとき, $G \mapsto {}^LG^0$ で type A_n, D_n は type A_n, D_n に写り, type B_n, C_n は入れ代わる．例えば $G = SL(n)$ のとき (type A_{n-1}, simply connected), ${}^LG^0 = PSL(n, \mathbf{C}) \cong PGL(n, \mathbf{C})$ (type A_{n-1}, adjoint type) である．

(1.1) から

$$\mathrm{Aut}(R_0({}^LG^0)) \cong \mathrm{Aut}(R_0(G)) \cong \mathrm{Out}({}^LG^0)$$

である．(最初の同型は定義から明らか.) (2.1) により, 準同型

$$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Out}({}^LG^0)$$

を得る．さらに定理 1.3 により準同型

$$\mu_G^L : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}({}^LG^0)$$

が得られる. (μ_G^L は ${}^L G^0$ による内部自己同型を除いて決まっている.) μ_G^L を用いて半直積

$$ {}^L G = {}^L G^0 \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \tag{2.3}$$

を作る. これを G の L-group という.

L-group の Weil form と呼ばれる variation を定義しよう. このために Weil 群について説明する. 一般に F が体, $K \subset \overline{F}$ は F の有限次 Galois 拡大体とする. K_{ab} は $\overline{F}$ に含まれる K の最大 Abel 拡大体を表す. このとき完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow 1$$

があり, この完全列は cohomology class $\eta_{K/F} \in H^2(\mathrm{Gal}(K/F), \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/K))$ を定める.

F は non-archimedian local field, $[K : F] = n$ とする. このとき

$$H^2(\mathrm{Gal}(K/F), K^\times) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

であって, $H^2(\mathrm{Gal}(K/F), K^\times)$ は fundamental class と呼ばれる canonical generator $\xi_{K/F}$ を持つことが知られている. 局所類体論により dense injection $K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/K)$ があり, $\xi_{K/F}$ をこの写像で写したものが $\eta_{K/F}$ である. $\xi_{K/F}$ を用いて群拡大

$$1 \longrightarrow K^\times \longrightarrow W_{F,K} \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow 1$$

を作る. $W_{F,K}$ を relative Weil 群という. F_{ur} により $\overline{F}$ に含まれる F の最大不分岐拡大体を表す. $F_{\mathrm{ur}} \subset K_{\mathrm{ab}}$ である. $W_{F,K}$ は $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/F)$ の元で $\mathrm{Gal}(F_{\mathrm{ur}}/F)$ に制限したとき Frobenius 写像のベキになっているものが成す群と一致する. $L \supset K$ が F の有限次 Galois 拡大体であるとき, 自然な準同型 $W_{F,L} \longrightarrow W_{F,K}$ がある. この写像について projective limit をとり絶対 Weil 群 W_F を定義する.

$$W_F = \varprojlim W_{F,K}.$$

W_F は $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の元で $\mathrm{Gal}(F_{\mathrm{ur}}/F)$ に制限したとき Frobenius 写像のベキになっているものが成す群と一致する

次に Weil-Deligne group scheme W_F' を定義しよう. q を F の剰余体の元の数, p を剰余体の標数とする. $g \in W_F$ が F_{ur} に制限して Frobenius 写像の n 乗であるとき, $\|g\| = q^{-n}$ とおく. R は p が可逆であるような可換環とする. $W_F'(R)$ は $R \times W_F$ に

$$(x_1, g_1)(x_2, g_2) = (x_1 + \|g_1\| x_2, g_1 g_2)$$

で演算を定義した群とする. W_F' は functor $R \mapsto W_F'(R)$ を represent する $\mathbf{Z}[1/p]$ 上の group scheme として定義される. (W_F, $W_F'(R)$ は inertia group

I を含むので, I の単位元の基本近傍系を W_F, $W_F'(R)$ の単位元の基本近傍系とすることで位相群の構造を与えておく.)

F は archimedean local field とする. $F = \mathbf{C}$ のとき $W_F = \mathbf{C}^\times$ と定義する. $F = \mathbf{R}$ のとき $W_{\mathbf{R}}$ は自明でない群拡大

$$1 \longrightarrow \mathbf{C}^\times \longrightarrow W_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \longrightarrow 1$$

として定義する. $W_{\mathbf{R}}$ は Hamilton quaternion algebra $\mathbf{H}$ を用いて $W_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{C}^\times, j \rangle$ と書くことができる.

F は global field とする. $C_F = F_A^\times / F^\times$ により F のイデール類群を表す. $[K : F] = n$ のとき

$$H^2(\mathrm{Gal}(K/F), C_K) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

であって, $H^2(\mathrm{Gal}(K/F), C_K)$ は fundamental class と呼ばれる canonical generator $\xi_{K/F}$ を持つことが知られている. 函数体の場合は局所体の場合と同様なので, F は代数体とする. 大域類体論により全射 (Artin map) $C_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/K)$ があり, kernel は C_K の単位元の連結成分 D_K である. $\xi_{K/F}$ をこの写像で写したものが $\eta_{K/F}$ である. $\xi_{K/F}$ を用いて群拡大

$$1 \longrightarrow C_K \longrightarrow W_{F,K} \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow 1$$

を作る. $W_{F,K}$ を relative Weil 群という. $L \supset K$ が F の有限次 Galois 拡大体であるとき, 自然な準同型 $W_{F,L} \longrightarrow W_{F,K}$ がある. この写像について projective limit をとり絶対 Weil 群 W_F を定義する.

$$W_F = \varprojlim W_{F,K}.$$

自然な写像 $W_F \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ があるから, ν_G^L を用いて半直積

$${}^L G = {}^L G^0 \rtimes W_F$$

を作ることができる. これを L-group の Weil form という. W_F を $W_{F,K}$ 或いは $\mathrm{Gal}(K/F)$ で置き換えた構成もできる. 適宜使い分ければよい.

以下 (2.3) を L-group として使う. Weil form を用いた場合も同様で本質的に同じ結果になる. L-group には直積位相を入れておく.

$$\pi_G : {}^L G \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$$

を canonical homomorphism とする.

定義 2.3. $P \subset {}^L G$ が parabolic subgroup $\Longleftrightarrow$ P は closed subgroup, $\pi_G(P) = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ かつ $P \cap {}^L G^0$ は ${}^L G^0$ の parabolic subgroup.

Δ の部分集合全体の成す集合（ベキ集合）を $\mathfrak{P}(\Delta)$ と書く. $\mathfrak{P}(\Delta)$ と G の parabolic subgroup で $\overline{F}$ 上定義されるものの $\overline{F}$ 上の共役類は一対一に対

応する．よって G の parabolic subgroup で F 上定義されているものの $\overline{F}$ 上の共役類は $\mathfrak{P}(\Delta)$ の部分集合 $\mathfrak{P}_0(\Delta)$ と一対一に対応する．Δ と $\check{\Delta}$ の間には bijection があるから, $\mathfrak{P}(\Delta)$ と $\mathfrak{P}(\check{\Delta})$ の間に bijection がある．この bijection で $\mathfrak{P}_0(\Delta)$ に対応するものを $\mathfrak{P}_0(\check{\Delta})$ と書く．

定義 2.4. ${}^LG$ の parabolic subgroup P が relevant $\Longleftrightarrow$ $P \cap {}^LG^0$ （の $\mathbf{C}$ 上の共役類）は $\mathfrak{P}_0(\check{\Delta})$ の元に対応する．

G が F 上 quasi-split, 即ち G は F 上に定義される Borel subgroup をもつとする．このとき全ての parabolic subgroup は relevant になる．

定義 2.5. G, H は connected reductive group とする．準同型 $\varphi : {}^LH \longrightarrow {}^LG$ が L-homomorphism $\Longleftrightarrow$ $\pi_H = \pi_G \circ \varphi$ かつ $\varphi|{}^LH^0 : {}^LH^0 \longrightarrow {}^LG^0$ は複素 Lie 群としての morphism である．

§3. Functoriality Principle

1°. F は local field とする．F が non-archimedean のとき, $W'_F = W'_F(\mathbf{C})$, F が archimedean のとき $W'_F = W_F$ とおく．G は F 上に定義された connected reductive group とする．

定義 3.1. 準同型 $\phi : W'_F \longrightarrow {}^LG$ は次の三条件 (i), (ii), (iii) をみたすとき, Langlands parameter であるという．
(i) 図式

$$\begin{array}{ccc} W'_F & \xrightarrow{\phi} & {}^LG \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) & = & \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \end{array}$$

は可換である．
(ii) ϕ は連続であり, $\phi(\mathbf{G}_a)$ は ${}^LG^0$ の unipotent 元である．ϕ は semisimple element を semisimple element [2] に写す．
(iii) ϕ の像が ${}^LG$ の parabolic subgroup P に含まれるならば, P は relevant である．

${}^LG^0$ による内部自己同型で移りあうとき Langlands parameter は同値であるという．$\Phi(G) = \Phi(G/F)$ により, Langlands parameter の同値類の集合を表す．$\Pi(G(F))$ により $G(F)$ の既約 admissible 表現の同値類全体の集合を表す．

Local Langlands Conjecture. 各 $\phi \in \Phi(G)$ に対し有限集合 $\Pi_\phi = \Pi_\phi(G(F)) \subset \Pi(G(F))$ が定まって

$$\Pi(G(F)) = \sqcup_{\phi \in \Phi(G)} \Pi_\phi$$

[2] ${}^LG$ の元は第一成分である ${}^LG^0$ の元が semisimple のとき, semisimple という．F が archimedean のとき, W'_F の元は全て semisimple と定義する．F は non-archimedean とする．$W'_F = \mathbf{C} \rtimes W_F \ni (x, g)$ は $\|g\| \neq 1$ または, $\|g\| = 1$, $x = 0$ のとき, semisimple という．

が成り立つ.

Π_ϕ を L-packet という. Π_ϕ はいくつかの条件をみたすと予想されている. 例えば条件として

Π_ϕ が discrete series の表現を含む $\Longleftrightarrow$ Π_ϕ は discrete series の表現からなる $\Longleftrightarrow$ $\phi(W'_F)$ はいかなる proper Levi subgroup にも含まれない

がある. $G = \mathrm{GL}(n)$ のとき Local Langlands conjecture は Harris-Taylor-Henniart により証明された. このとき各 Π_ϕ は唯一つの元からなる. 一般には Π_ϕ はかなり複雑な内部構造をもつ. これについては Arthur [A3] を参照されたい.

$$r : {}^L G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$$

は L-group の表現とする. $r|{}^L G^0$ は複素解析的であるとする. このとき $\pi \in \Pi_\phi$ の L 函数と ϵ-factor を

$$L(s, \pi, r) = L(s, r \circ \phi),$$

$$\epsilon(s, \pi, r, \psi) = \epsilon(s, r \circ \phi, \psi)$$

によって定義する. ここに ψ は加法群 F の自明でない指標であり, 右辺は W'_F の表現 $r \circ \phi$ の L 函数と ϵ-factor である.

G, H は F 上に定義された reductive group とする. L-homomorphism

$$\varphi : {}^L H \longrightarrow {}^L G$$

が与えられたとする. $\phi \in \Phi(H)$ を Langlands parameter（の同値類）とする. $\varphi \circ \phi : W'_F \longrightarrow {}^L G$ は Langlands parameter の定義 3.1 の条件 (i), (ii) をみたすが, G が quasi-split ならば条件 (iii) も成り立つ. よって G が quasi-split のとき, L-homomorphism は functoriality map

$$\Pi_\phi(H) \longrightarrow \Pi_{\varphi\circ\phi}(G) \tag{3.1}$$

を誘導する. $G = \mathrm{GL}(n)$ のとき $\Pi_{\varphi\circ\phi}(G)$ は唯一つの表現からなるが, $\Pi_\phi(H)$ は一般に複数個の表現を含むから, (3.1) は多対一対応である.

2°. F は global field, G は F 上に定義された connected reductive group とする. v は F の place とする. $\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \subset \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ [3] により, 自然な inclusion ${}^L G_v = {}^L(G/F_v) \subset {}^L G$ が得られる. π を $G(F_A)$ の既約 automorphic representation とする. このとき

$$\pi = \otimes_v \pi_v, \qquad \pi_v \in \Pi(G(F_v))$$

[3] この inclusion は v の上にある $\overline{F}$ の素因子の取り方に依存する.

と既約な局所表現 π_v のテンソル積に分解できる．$r: {}^LG \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ を L-group の表現とする．F の各 place v に対し制限にとり r は ${}^L(G/F_v)$ の表現 r_v を与えるから, L 函数と ϵ-factor を

$$L(s, \pi, r) = \prod_v L(s, \pi_v, r_v),$$

$$\epsilon(s, \pi, r) = \prod_v \epsilon(s, \pi_v, r_v, \psi_v)$$

によって定義する．ここに ψ は F_A の自明でない指標で F に制限すると自明になるものである．$L(s, \pi, r)$ を定義する無限積は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき収束することが示される．$L(s, \pi, r)$ の全 s 平面への有理型解析接続と函数等式

$$L(s, \pi, r) = \epsilon(s, \pi, r) L(1 - s, \widetilde{\pi}, \widetilde{r})$$

が予想される．(ここに$\tilde{}$は contragredient をとることを表す.)

今 H は F 上に定義された connected reductive group で L-homomorphism $\varphi: {}^LH \longrightarrow {}^LG$ が与えられたとする．F の各 place v について L-homomorphism $\varphi_v: {}^L(H/F_v) \longrightarrow {}^L(G/F_v)$ が得られる．$\rho = \otimes_v \rho_v$ を $H(F_A)$ の既約 automorphic representation とする．Local Langlands conjecture を仮定する．Langlands parameter $\phi_v \in \Phi(H/F_v)$ があって $\rho_v \in \Pi_{\phi_v}$ となる．G は F 上 quasi-split とする．

Problem on Functoriality. $G(F_A)$ の既約 automorphic representation $\pi = \otimes_v \pi_v$ で $\pi_v \in \Pi_{\varphi_v \circ \phi_v}, \forall v$ をみたすものが存在するであろうか.

これが成り立てば, functoriality correspondence

$$\mathcal{A}(H_A) \ni \rho \mapsto \pi \in \mathcal{A}(G_A)$$

で local な対応 $\rho_v \mapsto \pi_v$ が (3.1) と consistent になっているものが得られたことになる．π を ρ の functorial image という．(一般には local L-packet は複数個の元を含むので, π は一意的には決まらないことに注意.) この問題に対する答え (conjectual answer) は π の保型形式の空間における重複度 $m(\pi)$ を与える公式（予想）によって得られる．これについて簡単にふれておこう．(用語と記号の説明は省く.) π に対応する global Langlands parameter を ϕ とする．ϕ は tempered parameter と仮定する．Labesse-Langlands-Kottowitz によれば

$$m(\pi) = |\mathcal{S}_\phi|^{-1} \sum_{x \in \mathcal{S}_\phi} \epsilon_\phi(x) \langle x, \pi \rangle,$$

$$\langle x, \pi \rangle = \prod_v \langle x, \pi_v \rangle_v$$

の形である．この仮定下で local L-packet は generic な表現を含むと考えられるので π を generic とする．$\langle x,\pi\rangle = 1$ ゆえ $\sum_{x\in\mathcal{S}_\phi}\epsilon_\phi(x)\neq 0$ ならば問題の答えは肯定的である．とくに $G=\mathrm{GL}(n)$ ならば $|\mathcal{S}_\phi|=1$ ゆえ問題の答えは肯定的である．

3°. Examples.

(1) D は F 上の quaternion algebra とする．D の乗法群 $D^\times$ が定義する F 上の代数群を H とする．即ち H は任意の F-algebra A に対して $H(A)=(D\otimes_F A)^\times$ を充たす代数群である．このとき

$$^LH=\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})\times\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$$

である． $G=\mathrm{GL}(2)/F$ ととる． $^LH={}^LG$ であるから恒等写像を L-homomorphism としてとると correspondence

$$\mathcal{A}(H_A)\ni\otimes_v\pi'_v\longrightarrow\otimes_v\pi_v\in\mathcal{A}(G_A)$$

が得られる．D が v で split していると，$D(F_v)=\mathrm{GL}(2,F_v)$ ゆえ $\pi'_v=\pi_v$ で対応する．これは Jacquet-Langlands-Shimizu correspondence である．$\pi=\otimes_v\pi_v$ がこの対応の image にはいる条件は (π が無限次元のとき), D_v が division algebra になる v について π_v は principal series の表現ではないというものである．

(2) $[F:\mathbf{Q}]=2$, $H=\mathrm{GL}(2)/\mathbf{Q}$, $G=\mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(\mathrm{GL}(2))$ とする．L-group の finite form を用いると[4]

$$^LG=\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})^2\rtimes\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}),$$

$$^LH=\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})\times\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$$

である．σ を $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$ の生成元とする．L-homomorphism $^LH\longrightarrow{}^LG$ を

$$^LH\ni(g,\sigma^i)\longrightarrow(g,g,\sigma^i)\in{}^LG$$

で定義する．^LG の表現 $r:{}^LG\longrightarrow\mathrm{GL}(4,\mathbf{C})$ を

$$r((g_1,g_2),\sigma^i)=\begin{pmatrix}g_1&0\\0&g_2\end{pmatrix}w^i,\qquad w=\begin{pmatrix}0&1_2\\1_2&0\end{pmatrix}$$

で定義する．$\rho\in\mathcal{A}(H_A)$ の functorial image π は $\mathcal{A}(G_A)$ にあり

$$L(s,\pi,r)=L(s,\rho)L(s,\rho\otimes\chi)$$

[4]一般に Restriction of scalars での L-group の変化は induced group の概念を用いて記述される．[B] 参照.

が確かめられる．ここに χ は拡大 $F/\mathbf{Q}$ に対応する $F_A^\times$ の指標である．$G_A = G(\mathbf{Q}_A) = \mathrm{GL}(2, F_A)$ ゆえ π に対応する $\mathrm{GL}(2, F_A)$ の表現を $\tilde{\rho}$ と書くと $L(s, \pi, r) = L(s, \tilde{\rho})$ であり

$$L(s, \tilde{\rho}) = L(s, \rho)L(s, \rho \otimes \chi)$$

となる．$\rho \mapsto \tilde{\rho}$ は土井一長沼 lifting である．この対応の像は $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$ で不変な表現として特徴づけられる．

(3) $H = \mathrm{GL}(2)/F$, $G = \mathrm{GL}(n+1)/F$ とする．L-homomorphism ${}^L H \longrightarrow {}^L G$ を

$${}^L H \ni (g, \sigma) \longrightarrow (\rho_n(g), \sigma) \in {}^L G$$

によって定義する．ここに ρ_n は n 次の対称テンソル表現である．functorial image の存在は $n = 2$ のとき Gelbart-Jacquet, $n = 3$ のとき Shahidi-H.Kim, $n = 4$ のとき H. Kim によって証明された．この場合の functoriality が全ての n に対して証明されればRamanujan 予想, Selberg 予想, Sato-Tate 予想などが解けることが知られていて, この問題は重要である．$n \geq 3$ のときは endoscopic lift ではない．将来の理論の試金石となる場合であろう．

(4) $G = \mathrm{GSp}(n)$ とする．

$${}^L G^0 = (\mathrm{GL}(1, \mathbf{C}) \times \mathrm{Spin}(2n+1, \mathbf{C}))/A, \qquad A = \{1, a\}$$

である．ここに $a = (a_1, a_2)$, $a_1 = -1 \in \mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$, a_2 は $\mathrm{Spin}(2n+1, \mathbf{C})$ の center の位数 2 の元である．π は G_A の既約 automorphic representation とする．$\mathrm{Spin}(2n+1, \mathbf{C})$ の $(2n+1)$ 次元表現 (standard representation) st を用いて L 函数をつくる．(st は被覆写像 $\mathrm{Spin}(2n+1, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}(2n+1, \mathbf{C})$ から得られる.) $L(s, \pi, \mathrm{st})$ を π の standard L 函数という．$\mathrm{Spin}(2n+1, \mathbf{C})$ は spinor 表現 spin をもつ．これは 2^n 次元の表現である．$L(s, \pi, \chi \otimes \mathrm{spin})$ を π の spin L 函数という．ここに χ は $\mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$ の位数 2 の指標で $\chi(-1) = -1$ をみたす．$n \geq 4$ のとき $L(s, \pi, \chi \otimes \mathrm{spin})$ の解析接続は知られていない．

§4. 志村ー谷山予想の一般化

E と F は有限次代数体とする．M は F 上の motive, 係数の体は E とする．E の finite place λ に対して λ-adic representation

$$\rho_\lambda : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}(d, E_\lambda)$$

がある．ここで考えたい問題は ρ_λ に対応する automorphic representation を記述することである．以下 [Y] に述べた考え方をなるべく簡単に説明する．

M の Betti realization $H_B(M)$ は E 上の d 次元ベクトル空間である．d を M の rank という．$H_B(M) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ は Hodge 分解をもつ．これから M の weight が定義されるが, M は pure weight と仮定する．これを w とおく．Hodge 分解により, Hodge 群 $\mathrm{Hg}(M)$ が定義される．$\mathrm{Hg}(M)$ は E 上の connected group である．M は polarizable と仮定する．このとき $\mathrm{Hg}(M)$ は reductive となる．H を $\mathrm{Im}(\rho_\lambda)$ の Zariski closure とする．

予想 4.1. H は E 上に定義された代数群で λ によらない. H^0 を H の単位元の連結成分とすると, $H^0 = \mathrm{Hg}(M)$ である.

これは $E = \mathbf{Q}$ のときには良く知られた予想である. 一般の場合は $E = \mathbf{Q}$ のときと, compatible になっている. 以下これを仮定する. F の有限次 Galois 拡大体 K を

$$H^0 \cap \rho_\lambda(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)) = \rho_\lambda(\mathrm{Gal}(\overline{F}/K))$$

ととる. 埋め込み $E_\lambda \subset \mathbf{C}$ を決めておくと, これから完全列

$$1 \longrightarrow H^0(\mathbf{C}) \longrightarrow H(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow 1 \tag{4.1}$$

が得られる. (4.1) から H^0 の外部自己同型群への準同型

$$\varphi : \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow \mathrm{Out}(H^0) \cong \mathrm{Aut}(R_0(H^0))$$

が得られる.

命題 4.2. F 上の *connected reductive group* G を次の条件をみたすように取ることができる. *(i)* G は F 上 *quasi-split. (ii)* ${}^L G^0 = H^0(\mathbf{C})$. *(iii)* $\mu_G = \varphi$.

M に対応する automorphic representation は G_A 上に存在するのではないかと考えられる. [5] $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ に対し, $\widetilde{\sigma} \in H(\mathbf{C})$ を $\widetilde{\sigma}$ を (4.1) の準同型で写したものが σ になるようにとる.

$$\begin{cases} f(\sigma,\tau)\widetilde{\sigma\tau} = \widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}, \\ a(\sigma)n = \widetilde{\sigma}n\widetilde{\sigma}^{-1}, \qquad n \in H^0(\mathbf{C}) \end{cases}$$

とおく. $a(\sigma) \in \mathrm{Aut}(H^0(\mathbf{C}))$ である. このとき $\{a(\sigma), f(\sigma,\tau)\}$ は因子団で条件

$$\begin{cases} i(f(\sigma,\tau))a(\sigma\tau) = a(\sigma)a(\tau), \\ f(\sigma,\tau)f(\sigma\tau,\rho) = (a(\sigma)f(\tau,\rho))f(\sigma,\tau\rho) \end{cases} \tag{4.2}$$

をみたす. ここに $i(f(\sigma,\tau))$ は $f(\sigma,\tau)$ による内部自己同型を表す. 定理 1.3 により完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Inn}(H^0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^0) \longrightarrow \mathrm{Out}(H^0) \longrightarrow 1$$

は split するから, $\pi : \mathrm{Aut}(H^0) \longrightarrow \mathrm{Out}(H^0)$ を canonical homomorphism とすると, 準同型 $s : \mathrm{Out}(H^0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^0)$ があって $\pi \circ s = \mathrm{id}$ となる. このとき $\alpha_\sigma \in H^0(\mathbf{C})$ があって

$$s(\pi(a(\sigma))) = i(\alpha_\sigma)a(\sigma) \tag{4.3}$$

[5] $G = \mathrm{GL}(d)/E$ 上に存在するというのは良く知られた予想である. ここでは群を minimal にとることを考える. minimal と $\mathrm{GL}(d)$ の中間の場合も以下と同様に扱える.

となる．$\widetilde{\sigma}$ を $\alpha_\sigma\widetilde{\sigma}$ でとりかえると，因子団 $\{a(\sigma), f(\sigma,\tau)\}$ は同値な因子団 $\{a_Z(\sigma), f_Z(\sigma,\tau)\}$ に変わる．ここに

$$\begin{cases} a_Z(\sigma) = i(\alpha_\sigma)a(\sigma), \\ f_Z(\sigma,\tau) = \alpha_\sigma(a(\sigma)\alpha_\tau)f(\sigma,\tau)\alpha_{\sigma\tau}^{-1} \end{cases}$$

である．(4.3) から $\sigma \mapsto a_Z(\sigma)$ は準同型である．ここで因子団の条件 (4.2) の最初のものを見ると $i(f_Z(\sigma,\tau)) = 1$ がわかる．これは $f_Z(\sigma,\tau)$ は $H^0(\mathbf{C})$ の中心 $Z(H^0(\mathbf{C}))$ に入っていることを意味する．即ち 2-cocycle
$f_Z \in Z^2(\mathrm{Gal}(K/F), Z(H^0(\mathbf{C})))$ が得られた．

定理 4.3. *f_Z の cohomology 類 ($\in H^2(\mathrm{Gal}(K/F), Z(H^0(\mathbf{C})))$) は M にのみ依存する．*

ρ_λ から得られる f_Z の cohomology 類は，補助的な役割をはたす $\widetilde{\sigma}$, α_σ, s の取り方に依らないことが確かめられる．予想 4.1 から λ にも依らないことがわかる．ρ_λ の $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ への制限が abelian の場合には，fundamental class [6] とも関係し，この cohomology 類は基本的であると考えられる．

v は F の finite place とする．ρ_λ を制限することにより λ-adic representation

$$\rho_{\lambda,v} : \mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \longrightarrow H(E_\lambda) \subset GL(d, E_\lambda)$$

を得る．これから連続準同型

$$\psi_v : W'_{F_v} \longrightarrow H(E_\lambda) \subset H(\mathbf{C})$$

が得られる．f_Z は分解体 L を持つと仮定する．即ち L は K を含む F の有限次 Galois 拡大体で，f_Z を $\mathrm{Gal}(L/F)$ に inflate した 2-cocycle は split すると仮定する．このとき可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & {}^LG^0 & \longrightarrow & {}^LG & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(L/F) & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & H^0(\mathbf{C}) & \longrightarrow & H(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(K/F) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

がある．ψ_v を Langlands parameter $\phi_v : W'_{F_v} \longrightarrow {}^LG$ に持ち上げることができる．v が infinite place のときは，$H_B(M)$ の Hodge 分解から Langlands parameter ϕ_v を得る．志村ー谷山予想の一般化は次のように定式化される．

予想 4.4. 既約 *automorphic representation* $\pi = \otimes_v \pi_v \in \mathcal{A}(G_A)$ があって $\pi_v \in \Pi_{\phi_v}$, $\forall v$ をみたす．

f_Z の splitting field が存在するかどうか．これについては [Y] に書いた筆者の研究を参照されたい．

最後に次の（おそらく重要な）問題を述べておく．

---

[6] Weil 群の項を参照．

問題 4.5. *Langlands functoriality 以外に (automorphic representation に関係する) "functorial な現象" は存在するか.*

筆者は答えは肯定的であろうと考えている.

References

[A1] J. Arthur, Unipotent automorphic representations: Conjectures, Astérisque, 171-172 (1989), 13–71.

[A2] J. Arthur, A note on the automorphic Langlands group, Canad. Math. Bull. 45 (2002), 466–482.

[A3] J. Arthur, A note on L-packets, Pure and applied Mathematics Quarterly 2 (2006), 199–217.

[B] A. Borel, Automorphic L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. 33 (1979), part 2, 27–61.

[V] D. Vogan, The local Langlands conjecture, Contemp. Math. 145 (1993), 305–379.

[Y] H. Yoshida, Motivic Galois groups and L-groups, Clay Mathematics Proceedings, 13 (2011), 603–647.

文献案内

以上は Summer School のときの resume につけた文献表で本稿の内容と直接関係するものである．それ以外の教育的な文献（いずれも簡単ではないが）を各節ごとに挙げていく．なお Corvallis conference の記録 Proc. Sympos. Pure Math. 33 (1979) は有益である．

第零節．志村ー谷山予想については志村五郎氏の自伝 "The map of my life", Springer, 2008, "記憶の切繪図", 筑摩書房, 2008 に創始者による詳しい記述がある．志村全集 [64e] についてのコメントも参照．また
S. Lang, Some history of the Shimura-Taniyama conjecture, Notices of AMS. 42 (1995), 1301–1307
も予想について論じようというとき, 必読であろう．

第一節．代数群については, Borel, Humphreys の有名な教科書がある．Springer の書いた本もよいであろう．問題点は主に代数的閉体の上で理論を展開していることである．任意の体の上の reductive group の詳しい理論には Borel-Tits の論文
A. Borel and J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. IHES 27 (1965), 55–150

がある. SGA3 は最初から任意の scheme 上の group scheme の理論を作っているが, 大部で読みにくいであろう. また reductive group の理論の本質的なところではChevalley の結果を使っている. Root 系については
N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre IV, V, VI
を参照すればよい.

第二節. Weil 群については Artin-Tate “Class field theory” が詳しい. Weil の原論文も面白い. Weil はイデール類群 C_K の連結成分 D_K の存在が Riemann 予想の解決を阻んでいるのではないか, と考えていた. 函数体のときは $D_K = \{1\}$ で $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/F)$ を用いて Weil 群は簡単に構成できるが, 代数体のときはそうはいかない. D_K の克服が原論文のテーマであるが気魄が伝わってくると思う. L-group については References であげた Vogan の論文が面白い. L-group の構成と Local Langlands Conjecture の定式化を問題にしている.

第三節. multiplicity formula については [A1] と
J. -P. Labesse and R. P. Langlands, L-indistingushability for $SL(2)$, Can. J. Math. 31 (1979), 726–785,
R. Kottwitz, Stable trace formula: cuspidal tempered terms, Duke Math. J. 51 (1984), 611–650,
を参照. Arthur が新しい本を書いたそうである. Net で Arthur Arxiv に出ている. 私はまだ読んでいない.

第四節. Motive については AMS, Proc. Symposia pure Math. Vol. 55 (Part 1) “Motive” が良い. 好きな論文から読んでいくと勉強になる. Hodge group については Springer Lecture Note 900 にある Deligne の論文 (Milne のノート) が良い. Motive の category の簡潔な構成等については
U. Jannsen, Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity, Invent. Math. 107 (1992), 447–452
の一読をお勧めする. 現在 Motive についての幾何学的な興味は mixed motive と scheme 上の motive に移ってきている. しかし algebraic cycles についての重要な予想 (Hodge, Tate 等) には大きな進展はないようである.