Siegel Eisenstein 級数の Fourier 展開

軍司圭一

1 はじめに

本稿では Siegel Eisenstein 級数の Fourier 展開を扱う．Eisenstein 級数は Siegel 保型形式の具体例として最も基本的なものであり，表現論的，幾何的な分野への応用を考えたときにも極めて重要な関数である．整数論サマースクールのテーマとしては，Eisenstein 級数の Fourier 展開は Ikeda lift の構成において重要であるが，それをおいても Fourier 係数の計算は興味深い．にもかかわらず，一般の次数の Eisenstein 級数の Fourier 展開が明示的に書き下されたのはごく最近のことであり，1999 年の桂田氏の論文 [Kat] においてである．本稿では Maass のレクチャーノート [Ma] に書かれていることを中心に，Fourier 展開がどのように与えられるのかを解説したい．

2 Siegel 保型形式と Fourier 展開

Siegel 保型形式の一般論は [Kl] を参照のこと．

以下の記号を定義する．

$$
\begin{aligned}
\mathbb{H}_n &= \{Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}(Z) \gg 0\},\\
\mathit{\Gamma} = \mathit{\Gamma}^n &= Sp(n,\mathbb{Z}) = \{\gamma \in GL(2n,\mathbb{Z}) \mid \gamma J_n {}^t\gamma = J_n\}, \quad \text{ただし } J_n = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix},\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \;\middle|\; A\,{}^tB = B\,{}^tA,\ C\,{}^tD = D\,{}^tC,\ A\,{}^tD - B\,{}^tC = 1_n \right\},\\
\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}) &= \{N \in M_n(\mathbb{Z}) \mid N = {}^tN\}.
\end{aligned}
$$

$\mathbb{H}_n$ 上の関数 f と $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathit{\Gamma}$ に対して

$$
f|_k\gamma(Z) = \det(CZ+D)^{-k} f((AZ+B)(CZ+D)^{-1})
$$

と定める．$\mathit{\Gamma}$ に関する重さ k の正則 Siegel 保型形式の空間を

$$
M_k(\mathit{\Gamma}) = \left\{ f\colon \mathbb{H}_n \xrightarrow{\text{正則}} \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f|_k\gamma = \gamma,\ \forall\gamma \in \mathit{\Gamma}, \\ n=1 \text{ のとき } f \text{ は cusp } \infty \text{ で正則} \end{array} \right\}
$$

で定義する．

$f \in M_k(\Gamma)$ とすると，f は $Z \mapsto Z+N,\ N \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ の作用で不変であるから，Z の各成分の変数ごとに周期関数であり Fourier 級数に展開される．展開をきれいに記述するため，$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ のトレース形式に関する dual lattice を

$$\begin{aligned}S_n^* &= \{A \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \mid \mathrm{Tr}(AN) \in \mathbb{Z},\ \forall N \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})\} \\ &= \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \mid a_{ii} \in \mathbb{Z},\ a_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\ (i \neq j)\}\end{aligned}$$

と定める．S_n^* を半整数対称行列と呼ぶ．このとき $f \in M_k(\Gamma)$ は

$$f(Z) = \sum_{A \in S_n^*} c(A) \exp(2\pi i\, \mathrm{Tr}(AZ))$$

と展開されるが，さらに $A \not\geq 0$ であるときは $c(A)=0$ であることが示される (**Koecher 原理**).
よって $f \in M_k(\Gamma)$ は

$$f(Z) = \sum_{\substack{A \in S_n^* \\ A \geq 0}} c(A) \exp(2\pi i\, \mathrm{Tr}(AZ))$$

なる形の Fourier 展開を持つ．すなわち Fourier 係数は半正定値な半整数対称行列をパラメーターとして持つ.

$U \in GL_n(\mathbb{Z})$ とし，$\begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z})$ での変換を考えることにより

$$\det(U)^k C({}^tUAU) = C(A)$$

なる関係式が成り立つことに注意.

3 Siegel Eisenstein 級数の Fourier 展開

3.1 Eisenstein 級数の定義

$$\Gamma_\infty^n = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \Gamma^n \right\}$$

とおき，偶数 k に対して

$$E_k^n(Z) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty^n \backslash \Gamma^n} \det(CZ+D)^{-k}$$

と定める．k が偶数より右辺は well-defined となる．この級数は $k > n+1$ (k は整数であるから実際は $k \geq n+2$) のとき広義一様絶対収束し，$M_k(\Gamma)$ の元を定めることが示される.

注 収束を示すのはそれほど簡単ではない．[Kl] の 5 章に詳しく書いてあるが，$\Gamma \backslash \mathbb{H}_n$ の基本領域の話などの準備が色々と必要になる.

3.2 Symmetric co-prime pair

この話の目的である $E_k^n(Z) \in M_k(\Gamma)$ の Fourier 係数を計算する．そのためにはず定義の中の和をとる集合 $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$ を詳しく調べる．

補題 1 (1) $C, D \in M_n(\mathbb{Z})$ に対して

$$\begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma \iff \begin{cases} \text{(i)} \ \ C\,{}^tD \text{ が対称行列} \\ \text{(ii)} \ \ \text{ある } M, N \in M_n(\mathbb{Z}) \text{ が存在して } CM + DN = 1_n \text{ となる} \end{cases}$$

が成り立つ．(i) の条件を symmetric，(ii) の条件を co-prime と呼び，(i),(ii) を満たす組 $(C, D) \in M_n(\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ を symmetric co-prime pair と呼ぶ．$\mathcal{M}_n$ で symmetric co-prime pair 全体のなす集合を表す.

(2) 集合の全単射

$$\Gamma_\infty \backslash \Gamma \leftrightarrow GL_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{M}_n, \quad \begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto (C, D)$$

が存在する．ただし $GL_n(\mathbb{Z}) \ni U$ は $\mathcal{M}_n \ni (C, D)$ に (UC, UD) で作用し，$\mathcal{M}_n$ はこの作用で保たれれる．

証明) (1) $\Leftarrow$ のみ示す．$CM+DN = 1_n$ となる $M, N \in M_n(\mathbb{Z})$ を取ったとき, $A = {}^tN + {}^tMNC$, $B = -{}^tM + {}^tMND$ とおくと，$A\,{}^tB - B\,{}^tA = 0$, $A\,{}^tD - B\,{}^tC = 1_n$ が計算で確かめられる．すなわち $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ である．

(2) は容易. □

次に symmetirc co-prime pair (C, D) に対して，C の階数ごとに集合を分割する．すなわち次のように定める．$0 \leq r \leq n$ に対して

$$\mathcal{M}_n^r = \{(C, D) \in M_n \mid \operatorname{rank} C = r\}$$

とおく．特に

$$\mathcal{M}_n^0 = \{(0, U) \mid U \in GL_n(\mathbb{Z})\} \simeq GL_n(\mathbb{Z})$$

である．$\mathcal{M}_n^r$ もまた $GL_n(\mathbb{Z})$ の作用で保たれている．このとき Eisenstein 級数は

$$E_k^n(Z) = \sum_{r=0}^{n} E_k^{n,r}(Z),$$

$$E_k^{n,r}(Z) = \sum_{(C,D) \in GL_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{M}_n^r} \det(CZ + D)^{-k}$$

と分解される．$E_k^{n,0}(Z) = 1$ であり，また各 $E_k^{n,r}(Z)$ はもはや保型形式にはならないことに注意.

3.3 階数が低い場合

$r<n$ に対して $GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^r$ の代表系を書くため，次の記号を用意する．まず

$$\Lambda_{n,r}=\{Q\in M_{n,r}(\mathbb{Z})\mid \exists S\in M_{n,n-r}(\mathbb{Z})\ \text{s.t.}\ (Q,S)\in GL_n(\mathbb{Z})\}$$

とおく．各 $Q\in\Lambda_{n,r}$ に対して $\widetilde{Q}=(Q,*)\in GL_n(\mathbb{Z})$ を一つ取って固定しておく．

補題 2 $GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^r$ の代表系は次で与えられる．

$$\left\{\left(\begin{pmatrix}C' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}{}^t\widetilde{Q},\begin{pmatrix}D' & 0\\ 0 & 1_{n-r}\end{pmatrix}\widetilde{Q}^{-1}\right)\ \middle|\ \begin{array}{l}(C',D')\in GL_r(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_r^r\\ Q\in\Lambda_{n,r}/GL_r(\mathbb{Z})\end{array}\right\}$$

この補題より

$$\begin{aligned}E_k^{n,r}(Z)&=\sum_{Q}\sum_{(C',D')}\det\left(\begin{pmatrix}C' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}{}^t\widetilde{Q}Z+\begin{pmatrix}D' & 0\\ 0 & 1_{n-r}\end{pmatrix}\widetilde{Q}^{-1}\right)^{-k}\\&=\sum_{Q}\sum_{(C',D')}\det\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}C' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}{}^t\widetilde{Q}Z\widetilde{Q}+\begin{pmatrix}D' & 0\\ 0 & 1_{n-r}\end{pmatrix}}_{(\star)}\Bigg)^{-k}\end{aligned}$$

であるが，

$$(\star)=\begin{pmatrix}C'W+D' & *\\ 0 & 1_{n-r}\end{pmatrix},\quad W=({}^t\widetilde{Q}Z\widetilde{Q}\text{ の左上 }(r,r)\text{-block})$$

であるから，結局

$$E_k^{n,r}(Z)=\sum_{Q}\sum_{(C',D')\in GL_r(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_r^r}\det(C'Z[Q]+D')^{-k},\quad (Z[Q]={}^tQZQ\in\mathbb{H}_r)\tag{3.1}$$

となる．よって $E_k^{n,r}$ の Fourier 展開は，次数の低い Eisenstein 級数 $E_k^r(Z)$ の Fourier 展開に帰着されることになる．

実際 $z\in\mathbb{H}_r$ として

$$E_k^r(z)=\sum_{B\in S_r^*}C'(B)\exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(Bz))$$

となっているならば

$$\begin{aligned}E_k^{n,r}(Z)&=\sum_{Q\in\Lambda_{n,r}/GL_r(\mathbb{Z})}\sum_{B\in S_r^*}C'(B)\exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(BZ[Q]))\\&=\sum_{Q,B}C'(B)\exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(QB{}^tQZ))\end{aligned}$$

を得る．$\operatorname{rank}QB{}^tQ<r$ であるから，これは正定値でないような $A\in S_n^*$ に対しての Fourier 係数を与えていることになる．一方で後に示す通り (命題 1)，$E_k^{n,n}(Z)$ の Fourier 係数 $C(A)$ は A が正定値でないと消えてしまうため，低い階数の Fourier 係数はこの計算で尽きていることがわかる．

3.4 正定値の場合

前節の議論から $E_k^{n,n}(Z)$ の Fourier 展開を考えればよいことが分かる．このときは C が正則行列になるので

$$E_k^{n,r}(Z) = \sum_{(C,D)\in\mathcal{M}_n^n} \det(CZ+D)^{-k}$$
$$= \sum_{(C,D)} \det C^{-k} \det(Z + C^{-1}D)^{-k}$$

と書けるが，symmetric の条件より $C^{-1}D$ は対称行列である．

補題 3 次の全単射の対応がある．

$$(C,D) \in GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^n \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}), \quad (C,D) \mapsto C^{-1}D$$

証明)　逆写像は次で構成される．$T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})$ に対して，単因子論より $U, V \in GL_n(\mathbb{Z})$ が存在して

$$UVT = \begin{pmatrix} \nu_1/\delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \nu_n/\delta_n \end{pmatrix}, \quad (\nu_i, \delta_i) = 1,\ \delta_i | \delta_{i+1},\ \delta_i > 0$$

となる．このとき T に対して

$$\left(\begin{pmatrix} \delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n \end{pmatrix} U^{-1},\ \begin{pmatrix} \nu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \nu_n \end{pmatrix} V \right) \in GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^n$$

が逆写像を与えている．実際 $GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^n \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \to GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^n$ が恒等写像であること以外は容易．これを示すには，$(C,D),(C_1,D_1) \in \mathcal{M}_n^n$ に対して $C^{-1}D = C_1^{-1}D_1$ ならば，(C,D) と (C_1,D_1) が $GL_n(\mathbb{Z})$-同値であることを言えばよい．$U = C_1C^{-1}$ とおくと $UC = C_1 \in M_n(\mathbb{Z})$, $UD = D_1 \in M_n(\mathbb{Z})$ であるから (C,D) が co-prime であることより $U \in M_n(\mathbb{Z})$．同様に $U^{-1} = CC_1^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ となるので，結局 $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ である．$U(C,D) = (C_1,D_1)$ から主張を得る． □

$T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})$ に対して，証明中の記号を使って $\delta(T) = \prod_i \delta_i$ とおく．$(C,D) \leftrightarrow T$ ならば $\delta(T) = |\det C|$ となっている．さらに $S \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ とすると $\delta(T+S) = \delta(T)$ である．これは $(C,D) \leftrightarrow T$ とすると

$$\begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ C & CS+D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z})$$

だから補題 1 より $(C, CS+D) \in \mathcal{M}_n^n$ であり，$\mathcal{M}_n^n \ni (C, D+CS) \leftrightarrow T+S$ となっていることから分かる．以上のことより

$$
\begin{aligned}
E_k^{n,n} &= \sum_{T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})} \delta(T)^{-k} \det(Z+T)^{-k} \\
&= \sum_{\substack{T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})}} \delta(T)^{-k} \sum_{S \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})} \det(Z+T+S)^{-k} \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

と書ける．

次に $Z = X+iY \in \mathbb{H}_n$ として，Fourier 展開

$$
\sum_{S \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})} \det(Z+S)^{-k} = \sum_{A \in S_n^*} \xi_n(Y, A, k) \exp(2\pi i \,\mathrm{Tr}(AX)) \qquad (3.3)
$$

を考える． このとき Fourier 係数 $\xi_n(Y, A, k)$ は

$$
\xi_n(Y, A, k) = \int_{\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R})} \det(X+iY)^{-k} \exp(-2\pi i \,\mathrm{Tr}(AX))\, dX
$$

で与えられるが，(3.3) の右辺の級数が収束する範囲 $(k > n)$ ではこれは正則関数になるから，

$$
\xi_n(Y, A, k) = \widetilde{\xi}_n(A, k) \exp(-2\pi \,\mathrm{Tr}\, Y)
$$

とかけている．この式を $X \mapsto X+T$ と置き換えて (3.2) に代入すると

$$
\begin{aligned}
E_k^{(n)}(Z) &= \sum_T \delta(T) \sum_{A \in S_n^*} \widetilde{\xi}_n(A, k) \exp(2\pi i \,\mathrm{Tr}(AT)) \exp(2\pi i \,\mathrm{Tr}(AZ)) \\
&= \sum_{A \in S_n^*} \widetilde{\xi}_n(A, k) b_n(A, k) \exp(2\pi i \,\mathrm{Tr}(Z)) \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

但し

$$
b_n(A, k) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})}} \delta(T)^{-k} \exp(2\pi i \,\mathrm{Tr}(AT))
$$

を得る．(3.4) に現れる ξ_n 及び b_n を以後詳しく見ていこう．

3.5 合流型超幾何関数

$\xi_n(Y, A, k)$ は合流型の超幾何関数と呼ばれており，$n = 1$ の場合は古典的，$n = 2$ の場合は Kaufold ([Kau]) で扱われており，一般の n に対しては Siegel が明示式を求めている．さらに Shimura([Sh1]) はより一般の場合の詳しいを行っている．結論を述べよう．

$$
\Gamma_m(s) = \pi^{m(m-1)/4} \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(s - j/2)
$$

とおく．

命題 1 ([Si, (111)], [Sh1, (3,15),(4.7K),(4,10)]) $A \in S_n^*$ とする．このとき

$$\widetilde{\xi}_n(A,k) = \begin{cases} \dfrac{2^{-\frac{n(n-1)}{2}}(-2\pi i)^{nk}}{\Gamma_n(k)}(\det A)^{k-\frac{n+1}{2}} & A \gg 0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

が成り立つ．

すなわち $\widetilde{\xi}_n(A,k)$ は A が正定置のときのみ意味を持ち，ガンマ関数の積と $\det A$ のべきとで表されている．[Sh1] ではもっと広い範囲の関数が扱われており，任意の対称行列 A と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\mathrm{re}(\alpha+\beta) \gg 0$) に対して

$$\xi_n(Y, A; \alpha, \beta) = \int_{\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R})} \det(X+iY)^{-\alpha} \det(X-iY)^{-\beta} \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(AX))\, dX$$

を考え (複素数べきは適切に定義している)，それを $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ に対して解析接続したものが考察されている．その結論は，A の符号を $(p+, q-)$ としたとき

$$\xi_n(Y, A; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma_{n-p-q}(\alpha+\beta-\frac{n+1}{2})}{\Gamma_{n-q}(\alpha)\Gamma_{n-q}(\beta)} \times (\alpha, \beta \text{ の正則関数})$$

となるというものである．よって $k > n+1$ の仮定の下では，正定値でない A に対しては $\Gamma_{n-q}(\beta)$ の寄与のおかげで $\xi_n(Y, A, k) = \xi_n(Y, A; k, 0) = 0$ を得る．

3.6 Siegel 級数

$s \in \mathbb{C}$ とする．

$$b_n(A, s) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \\ \bmod \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})}} \delta(T)^{-s} \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(AT))$$

は Siegel 級数 (あるいは singular 級数) とよばれる．各 $T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})$ は

$$T = T_{p_1} + T_{p_2} + \cdots + T_{p_r}, \quad T_{p_i} \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}),\ \delta(T_{p_i}) = p_i^{e_i},\ (p_i \text{ は素数})$$

と分解され，この分解は $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})/\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ の中で一意である．実際 $mT \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ となる $m \in \mathbb{Z}$ を取り，$1/m = \sum_i q_i/p_i^{f_i}$ と分解して $T_{p_i} = (q_i m/p_i^{f_i})T$ とおけばよい．この分解において $\delta(T) = \prod_i \delta(T_{p_i})$ が成り立つことから，$b_n(A,s)$ は各素数ごとの積に分かれる Euler 積表示を持つ．すなわち

$$b_n(A,s) = \prod_p b_n^p(A,s)$$

と分解される．ここに

$$b_n^p(A,s) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_p) \\ \bmod \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}_p)}} \delta(T)^{-s} \mathbf{e}_p(\operatorname{Tr}(AT))$$

であり，$\mathbf{e}_p$ は

$$\mathbf{e}_p\colon \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \bigcup_m \frac{1}{p^m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \xrightarrow{e^{2\pi i(\cdot)}} \mathbb{C}^\times$$

で与えられる指標である．また $T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_p)$ に対しての $\delta(T)$ は p べきとなるようにとるものとする．

$b_n^p(A,s)$ は数多くの数学者によって研究されてきた．$n=2$ の場合は Kaufhold ([Kau]) が明示式を与えており，n が一般の場合も Siegel, Feito, Shimura, Kitaoka などの研究を経て，その明示式は 1999 年，Katsurada ([Kat]) によりようやく完全に解決された．明示式をすべて書き下すには記号の準備も大変であり，原論文を参照していただきたい．ここでは大雑把な形といくつかの性質をあげるのに留めておく．

まず $b_n^p(A,s)$ は p^{-s} の $\mathbb{Q}$-係数有理式となることが知られている．Shimura ([Sh2]) では Langlands の結果 ([La]) を引用して証明しているが，より初等的に示すこともできると思われる．

Siegel 級数は Rieman ゼータ関数の Euler 因子と多項式の積の形で表すことができる．Euler 因子をすべて決定したのが以下に紹介する Kitaoka の結果である．記号の準備として，n を偶数，$\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^n\det(2A)})/\mathbb{Q}$ の判別式を D_A とし，χ_A を 2 次拡大に付随する指標とする．すなわち χ_A は素数 p に対して

$$\chi_A(p) = \left(\frac{D_A}{p}\right)$$

で定まる指標である．$(-1)^n\det(2A) = D_A f_A^2$ で $f_A \in \mathbb{N}$ を定める．

命題 2 ([Ki, Theorem 2]) $A \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})$ に対して，ある $F_p(A,T) \in \mathbb{Z}[T]$ が存在して

$$b_n(A,s) = \left\{\begin{array}{ll} (1-p^{-s})\displaystyle\prod_{j=1}^{n/2}(1-p^{2j-2s})(1-\chi_A(p)p^{-s+n/2})^{-1} & n\colon \text{even} \\ (1-p^{-s})\displaystyle\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}(1-p^{2j-2s}) & n\colon \text{odd} \end{array}\right\} \times F_p(A,p^{-s})$$

と表される．$F_p(A,T)$ はほとんどすべての p に対して 1 となる．

この $F_p(A,T)$ を書き下したのが Katsurada の論文 [Kat] である．後ほど n が小さい場合の実例を述べる．

以上をまとめて次の定理を得る．

定理 1 (主結果) $n > k+1$ とする．Eisenstein 級数の Fourier 展開

$$E_k^{n,r}(Z) = \sum_{A\in S_n^*, A\geq 0} C(A)\exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(AZ))$$

に対して次が成り立つ．

(1) $A \gg 0$ のとき

$$C(A) = \widetilde{\xi}_n(A, k) \prod_p b_n^p(A, k)$$

なる形の Euler 積表示を持つ．それぞれの具体的な形については命題 1 及び 命題 2 を参照のこと．

(2) $\operatorname{rank} A = r < n$ のとき．このときは $A = QA'{}^tQ$ となる $Q \in \Lambda_{n,r}$ 及び $S_r^* \ni A' \gg 0$ を取ることができ

$$C(A) = \widetilde{\xi}_r(A', k) \prod_p b_r^p(A', k)$$

が成り立つ．

4 いくつかの注意と例

4.1 Siegel 級数に関する注意

Siegl 級数に関して，知られていることをいくつか注意しておく．Katsurada[Kat] は明示式を計算するに当たり，同論文で以下のような関数等式を示している．簡単のため n が偶数のときのみ書いておくが，n が奇数のときにも関数等式がある．

命題 3 n を偶数とする．このとき関数等式

$$F_p(A, p^{-n-1}T^{-1}) = (p^{\frac{n+1}{2}}T)^{-f_A} F_p(A, T)$$

が成り立つ．

これは Ikeda lift を構成する上で重要な等式である．

Siegel 級数は局所密度との関係でも重要である．$S \in \mathrm{Sym}^m(\mathbb{Z})$ と $T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ に対して，集合

$$\{X \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}) \mid {}^tXSX \equiv T \bmod p^l\}$$

を考える．上の集合を濃度を $A_{p^l}(S, T)$ と書いたとき，

$$\alpha_p(S, T) = \lim_{l \to \infty} p^{-l(n(n+1)/2 - mn)} A_{p^l}(A, T)$$

と置き，これを局所密度と呼ぶ．右辺は極限の形をとっているが，実は l が十分大きなところでは stable になっている．

命題 4 $H_k = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1_k \\ 1_k & 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき $S_n^* \ni A \gg 0$ に対して

$$b_n^p(A, k) = \alpha_p(H_k, A)$$

が成り立つ．

すなわち Siegel 級数は局所密度を用いて表示できる．一方で局所密度は大雑把にいって，$\mathbb{Z}_p$ 上での 2 次形式の表現数の個数を記述するものであるから，これらの素数 p に関する無限積は $\mathbb{Z}$ 上での 2 次形式の表現数，すなわち theta 級数と関係が深い．実際に上の命題は Eisenstein 級数が theta 級数を用いて表示できるという「Siegel-Weil 公式」の基礎になるものである．上記命題も含め，このあたりは Arakawa による解説 [Ar] がまとまっていて読みやすい．

4.2 実例

次数が小さい場合の Eisenstein 級数の Fourier 係数を具体的に書き下してみる．

- $n=1$ の場合
  この場合はよく知られているように，Fourier 係数には約数のべき乗和が現れる．その様子を観察してみよう．
  Siegel 級数の計算はこの場合非常に初等的である．$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $b_1^p(m,s)$ を計算する．$m = p^t m'$, $(p, m') = 1$ と書いたとき

$$\begin{aligned} b_1^p(m,s) &= \sum_{r \in \mathbb{Q}_p \bmod \mathbb{Z}_p} \delta(r)^{-s} \mathbf{e}_p(mr) \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} p^{-ls} \sum_{u \in (\mathbb{Z}/p^l)^\times} \exp\left(\frac{2\pi i m' u}{p^{l-t}}\right). \end{aligned}$$

である．ここで $u = u_2 p + u_1$, $u_2 \in \mathbb{Z}/p^{l-1}$, $u_1 \in (\mathbb{Z}/p)^\times$ と分解すると

$$b_1^p(m,s) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} p^{-ls} \sum_{u_2 \in \mathbb{Z}/p^{l-1}} \exp 2\pi i \left(\frac{m' u_2}{p^{l-t-1}}\right) \sum_{u_1 \in (\mathbb{Z}/p)^\times} \exp 2\pi i \left(\frac{m' u_1}{p^{l-t}}\right).$$

となる．指標の直交性から真ん中の和は $l \geq t+2$ で消えてしまうため，これは有限和であり

$$b_1^p(m,s) = 1 + \sum_{l=1}^{t+1} \left(p^{-ls+l-1} \sum_{u_1 \in (\mathbb{Z}/p)^\times} \exp 2\pi i \left(\frac{m' u_1}{p^{l-t}}\right)\right)$$

となる．最後の和は

$$\sum_{u_1 \in (\mathbb{Z}/p)^\times} \exp 2\pi i \left(\frac{m' u_1}{p^{l-t}}\right) = \begin{cases} p-1 & l \leq t \text{ のとき}, \\ -1 & l = t+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

であるから，結局

$$\begin{aligned} S^p(n,s) &= 1 + \sum_{l=1}^{t} p^{l(1-s)-1}(p-1) - p^{(1+t)(1-s)-1} \\ &= (1-p^{-s}) \sum_{l=0}^{t} p^{(1-s)l} \end{aligned}$$

である．すなわちこのときは

$$F_p(m,T) = \sum_{l=0}^{\operatorname{ord}_p m} (pT)^l$$

が成り立つ．
よって

$$b_1(m,k) = \prod_p b_1^p(m,k) = \frac{1}{\zeta(k)} \prod_p \sum_{l=0}^{\operatorname{ord}_p m} p^{-(k-1)}$$

である．k が偶数であることに注意して，

$$\xi_1(m,k) = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} m^{k-1}$$

とあわせると，結局

$$C(m) = \frac{(2\pi i)^k \sigma_{k-1}(m)}{\zeta(k)(k-1)!}, \quad \text{ただし} \ \ \sigma_l(m) = \sum_{d|m} d^l$$

を得る．これはよく知られた結果と一致する．

- $n=2$ のとき
命題 1 より

$$\widetilde{\xi}_2(A,k) = \frac{(2\pi)^k \det(A)^{k-3/2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(k)\Gamma(k-1/2)}$$

であり，命題 2 から

$$b_2(A,k) = \frac{L(k-1,\chi_A)}{\zeta(k)\zeta(2k-2)} \prod_p F_2(A, p^{-k})$$

である．$F_p(A,T)$ の具体的な形を [Kau] に従って記述してみよう．$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$\alpha_1 = \operatorname{ord}_p(\gcd(a_1, 2a_2, a_3)), \quad \alpha = \operatorname{ord}_p f_A$$

と定めたとき

$$F_p(A,T) = \sum_{l=0}^{\alpha_1} (p^2T)^l \left\{ \sum_{m=0}^{\alpha-l} (p^3T^2)^m - \chi_A(p)pT \sum_{m=0}^{\alpha-l-1} (p^3T^2)^m \right\}$$

が成り立つ．

参考文献

[Ar] T. Arakawa, “2 次形式入門 I(Siegel 公式と Eisenstein 級数)”, 第 1 回整数論サマースクール報告集「アイゼンシュタイン級数について」

[Kat] H. Katsurada, “An explicit formula for Siegel series”, Amer. J. Math. **121** (1999), 415-452.

[Kau] G. Kaufhold “Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades”, Math. Ann. **137**, 1959, 454-476.

[Ki] Y. Kitaoka, “Dirichlet series in the theory of quadratic forms”, Nagoya Math. J. **92** (1984), 73-84.

[Kl] H. Klingen, “Introductory lectures on Siegel modular forms”, Camblridge studies in advanced math. 20, 1990

[La] R. P. Langlands “On the functional equations satisfied by Eisenstein series”, Lecture notes in Math. 544, Springer, 1976.

[Ma] H. Maass “Siegel’s modular forms and Dirichlet series”, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 216. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971

[Sh1] G. Shimura, “Confluent hypergeometric functions on tube domains”, Math. Ann. **260** (1982), no. 3, 269–302

[Sh2] G. Shimura, “On Eisenstein series”, Duke Math. J., **50** (1983), 417-476.

[Si] C.L. Siegel, “Über die analytishe Theorie der quadratischen Formen I, Ann. Math. **36** (1935), 527-606